This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

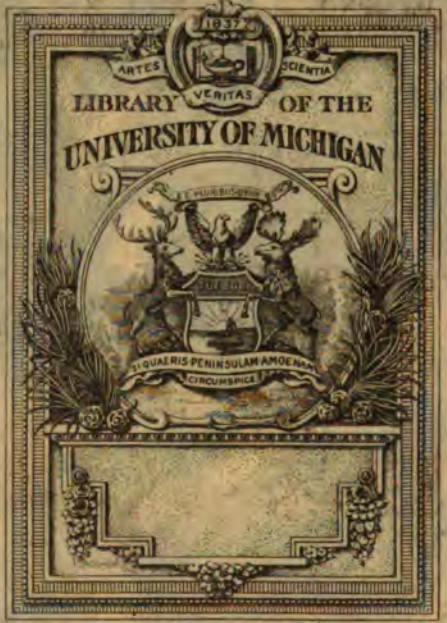
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`


ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

NON
CIRCULATING

QA
3
.A367
1961

R. P. Feb. 28. 1865.

8 Vol
VC/1/4

Swd. BB/

OPUSCULES

MATHÉMATIQUES,

OU

92173

MÉMOIRES sur différens sujets de GÉOMÉTRIE, de MÉCHANIQUE, D'OPTIQUE, D'ASTRONOMIE &c.

Par M. D'ALEMBERT, de l'Académie Françoiſe, des Académies Royales des Sciences de France, de Pruſſe & d'Angleterre, de l'Académie Royale des Belles-Lettres de Suéde, & de l'Inſtitut de Bologne.

TOME PREMIER.

A PARIS,

Chez DAVID, rue & vis-à-vis la grille des Mathurins.

M. DCC. LXI.

AVEC APPROBATION ET PRIVILÉGE DU ROI.

AVERTISSEMENT.

Comme les différens Mémoires contenus dans ces *Opuſcules*, exigent une lecture attentive & ſuivie, pour ſe mettre au fait des matieres qui y ſont traitées, je me contenterai de donner ici une idée générale de ce qu'ils contiennent.

Dans le premier je fais voir contre M. Daniel Bernoulli, que la ſolution donnée par M. Taylor du Problême des *Cordes vibrantes*, eſt inſuffiſante & imparfaite, même avec l'extenſion ingénieuſe que M. Bernoulli y a donnée; je prouve que la ſeule vraie ſolution de ce Problême eſt celle que j'ai trouvée le premier par une méthode ſinguliere & nouvelle, & que j'ai publiée dans les Mémoires de l'Académie de Berlin 1747. Je prouve de plus contre M. Euler, que cette ſolution, quoiqu'auſſi générale qu'il eſt poſſible, n'eſt cependant applicable qu'aux cas où la corde

a une certaine figure au commencement de ſon mouvement ; & que dans les autres cas le mouvement de la corde ne peut être repréſenté par aucune formule analytique, ou, ce qui révient au même, ne peut être ſoumis au calcul. Dans un Supplément à ce Mémoire, je réponds à un très-habile Géometre de Turin, M. de la Grange, qui avoit embraſſé l'opinion de M. Euler, & qui l'avoit appuyée par de nouvelles preuves, trouvant celles de M. Euler inſuffiſantes.

Le ſecond Mémoire a pour objet le mouvement d'un corps qui tourne autour d'un axe quelconque, fixe ou variable, avec une viteſſe quelconque, variable ou uniforme, étant animé ou non par des forces accélératrices quelconques. Cet Ecrit n'eſt qu'une application des formules du Problême de la *Préceſſion des Equinoxes*, que j'ai réſolu le premier, à des cas encore plus généraux. De ſavans Géometres ont déja traité le ſujet qui fait l'objet de ce Mémoire ; mais ma ſolution du Problême de la préceſſion des Equinoxes, qui a ouvert la route pour réſoudre ce genre de queſtions, avoit pré-

cédé leur travail, comme ils n'ont pas fait difficulté d'en convenir eux-mêmes.

Dans le troiſiéme Mémoire, je développe les loix des oſcillations des corps flottans, ſur leſquelles j'avois déja donné un Eſſai dans ma *Théorie de la réſiſtance des fluides*. M. l'Abbé Boſſut, Profeſſeur Royal de Mathématique aux Ecoles du Génie, & Correſpondant de l'Académie des Sciences, a fait un uſage heureux & utile de quelques-unes de mes formules dans ſon excellente piéce ſur l'*Arrimage des Navires*, qui a partagé le prix de l'Académie en 1761. Il a de plus ajouté à ces formules beaucoup de remarques curieuſes & importantes qui lui appartiennent, & qui ont rapport au mouvement des Navires.

Le quatriéme Mémoire a pour objet la réduction des loix du mouvement des fluides aux équations analytiques les plus générales qu'il eſt poſſible; après avoir donné ces équations, je fais voir qu'il y a très-peu de cas où le mouvement des fluides puiſſe y être réduit, & par conſéquent être déterminé par un calcul rigoureux; d'où il s'enſuit qu'en général les loix de

l'Hydrodynamique, entant qu'on les ſoumet au calcul, ne peuvent être connues qu'à-peu-près.

Le but du cinquiéme Mémoire eſt de rendre plus rigoureuſe & plus ſimple l'ingénieuſe démonſtration du principe de la compoſition des forces, que M. Daniel Bernoulli a donnée dans le premier Volume des Mémoires de Péterſbourg.

Ces cinq Mémoires avoient déja été annoncés dans l'Avertiſſement de la nouvelle Edition de mon *Traité de Dynamique;* ils étoient dèſlors en état de paroître; depuis ce tems je les ai perfectionnés, & augmentés de nouvelles recherches.

Dans le ſixiéme Mémoire, je ſoutiens contre le célébre M. Euler, le même ſentiment que ſoutint autrefois M. Jean Bernoulli contre M. Leibnitz, ſavoir que les *Logarithmes des quantités négatives ne ſont point imaginaires, mais réels,* ou plutôt qu'ils peuvent être ſuppoſés à volonté réels ou imaginaires, & que tout dépend du ſyſtême de Logarithmes qu'on choiſit. Aux preuves que M. Jean Bernoulli a données de ſon ſentiment, & que j'ai développées & expo-

ſées d'une maniere encore plus frappante, j'en ai joint pluſieurs autres ; & j'ai répondu aux objections de MM. Leibnitz & Euler, de maniere à ne laiſſer, ce me ſemble, aucun doute ſur cette queſtion épineuſe & délicate.

Le ſeptiéme Mémoire eſt un ſupplément à ce que j'ai donné dans les Mémoires de Berlin de 1746 & 1748, ſur les intégrations qui dépendent de la rectification des Sections coniques, & de la quadrature des lignes du troiſiéme ordre, & une application de ces intégrations à la quadrature de la ſurface des cônes obliques.

J'ai recueilli dans le huitiéme Mémoire pluſieurs remarques ſur l'attraction, pour éclaircir & développer quelques endroits de mes autres Ouvrages. J'y fais voir ; 1°. qu'en ſuppoſant à la Terre un noyau intérieur d'une denſité différente du reſte du ſphéroïde, la figure extérieure de la Terre dépend moins de la figure de ce noyau, comme l'ont cru quelques ſavans Géometres, que du rapport de ſa denſité avec la denſité du reſte du ſphéroïde. 2°. Que la Terre, même en la ſuppoſant en partie fluide, pourroit

ſubſiſter ſans être un ſolide de révolution, pourvû qu'elle eût un noyau intérieur ſolide, qui ne fût pas un ſolide de révolution, & qui fût d'une denſité différente de la partie fluide. 3°. Enfin j'explique pourquoi un corpuſcule placé ſur une ſurface ſphérique, éprouve une attraction qui n'eſt que la moitié de celle que la même ſurface exer eroit ſur le même corpuſcule, s'il étoit placé à une diſtance infiniment peu plus grande.

Le neuviéme Mémoire contient l'examen des principes qu'on employe communément en Optique, tant par rapport aux loix de la viſion directe, que par rapport à celles de la viſion réfléchie ou réfractée; j'en fais voir le peu de ſolidité, & j'en conclus que dans cette Science preſque tout eſt encore à faire; que les principes qui y ſont le plus généralement reçus, ſont, ou faux, ou tout au moins très-incertains; qu'il eſt très-douteux, par exemple, que les objets ſoient toujours vûs dans la direction du rayon viſuel; que l'on n'eſt pas plus inſtruit ſur les loix de la diſtance & de la grandeur apparente

des

des objets dans les miroirs & dans les verres; que les expériences d'Optique qui paroiſſent les plus ſimples, ſont ſujettes à beaucoup d'illuſions & de variétés &c. Je donne auſſi dans ce même Mémoire une méthode que je crois aſſez ſimple & aſſez ſûre pour déterminer la diſtance & la grandeur apparente des objets dans la viſion directe; & je fais à cette occaſion différentes remarques qui pourront, je crois, intéreſſer les Géometres.

Dans le dixiéme Mémoire, j'examine les principes reçus juſqu'ici par les Mathématiciens ſur le calcul des probabilités, & je tâche de montrer que ces principes ſont au moins très-douteux, pour ne rien dire de plus. C'eſt à quoi je parviens en éxaminant un cas ſingulier du Problême des jeux de hazard, ſur la ſolution duquel les Analyſtes paroiſſent s'être vainement exercés juſqu'aujourd'hui, & qui ne peut être ſuſceptible d'une ſolution ſatisfaiſante, qu'en limitant & en modifiant les principes dont ces mêmes Analyſtes ſe ſont ſervis juſqu'à préſent pour réſoudre les queſtions de cette eſpéce.

Le onziéme Mémoire, ſur l'Inoculation de la petite Vérole, a pour objet de prouver que dans les calculs qu'on a faits juſqu'à préſent pour conſtater les avantages de l'inoculation, on n'a point enviſagé la queſtion ſous ſon véritable point de vûe; & qu'il eſt très-difficile, pour ne pas dire impoſſible, d'apprétier ces avantages par le calcul; ce qui n'empêche pas, comme je l'obſerve, que la pratique de l'inoculation ne puiſſe être avantageuſe, quand elle ſera conduite avec les précautions convenables. Comme l'objet de ce Mémoire intéreſſe tous les Citoyens, j'ai tâché de le rendre clair & impartial; il n'eſt perſonne qui avec un peu d'attention ne puiſſe le lire, l'entendre & le juger; les détails Mathématiques ſont rejettés dans des notes très-étendues, que j'ai jointes au Mémoire, & qui contiennent beaucoup d'autres remarques importantes ou curieuſes ſur la théorie de l'inoculation.

Dans le douziéme Mémoire, après avoir montré, contre la prétention d'un ſavant Géometre, que la théorie des perturbations des Comètes eſt contenue dans la ſolution que j'ai donnée

dès 1747 du Problême des trois corps, je perfectionne cette théorie; j'en ſimplifie la pratique par différens moyens que je propoſe pour cet effet; & je parviens à une méthode pour calculer les perturbations des Comètes, plus ſimple, ce me ſemble, plus abrégée & plus facile, que ce qui a été publié juſqu'à préſent ſur cette matiere. L'Académie de Peterſbourg a propoſé ce Problême pour le ſujet du Prix qu'elle doit diſtribuer cette année; & elle exige qu'on y joigne l'application de la théorie à la Comète de 1759. Comme je n'ai eu connoiſſance que fort tard du Programme, je n'ai pas eu le tems néceſſaire pour entreprendre ce calcul, dont la longueur énorme eſt d'ailleurs ſeule capable de rebuter, quand on n'eſt aidé par perſonne. Je me ſuis donc contenté de faire part aux Géometres de ma méthode, dont j'ai expoſé le procédé avec le plus grand détail, & avec toute la clarté qui m'a été poſſible: & je me flatte qu'il n'y aura point de Calculateur tant ſoit peu intelligent, qui ſur cet expoſé ne puiſſe entreprendre de déterminer les altérations du mouvement des Comètes; puiſ-

que j'ai eu ſoin de lui mettre ſous les yeux la ſuite des opérations qu'il doit faire, & qu'il n'y a plus abſolument qu'à ſubſtituer aux quantités algébriques les nombres qui conviennent à chaque Comète en particulier.

J'éxamine dans le treiziéme Mémoire, la diſpute qui s'eſt élevée entre les Géometres au ſujet de la différence d'un mois qui s'eſt trouvée entre la prédiction du retour de la Comète de 1682, & l'obſervation de ce même retour. Je prouve que cette différence ne doit point être comparée (comme on l'a prétendu) à la période entiere, encore moins à la ſomme de deux périodes conſécutives, mais ſeulement à la différence de ces deux périodes, qui n'eſt que de 18 mois; & qu'ainſi la différence entre le calcul & l'obſervation, eſt au moins d'un dix-huitiéme, & non pas de $\frac{1}{1800}$. Je prouve même, qu'en faiſant la répartition la plus vraiſemblable & la plus naturelle des erreurs commiſes dans les différens réſultats, l'erreur du dernier réſultat a dû être vraiſemblablement un cinquiéme du total; ce qui doit être uniquement

imputé à la nature des circonſtances du Problême, qui n'a pas permis une plus grande préciſion dans les calculs.

Le quatorziéme Mémoire eſt deſtiné à défendre ma ſolution du Problême des trois corps contre les objections qu'on y a faites, & à montrer les avantages de cette ſolution ſur celles qui ont été données du même Problême.

Ce Mémoire eſt ſuivi de nouvelles Tables de la Lune, d'une forme très-commode & très-ſimple. J'ai d'autant plus lieu d'eſpérer que les Aſtronomes en feront uſage, que je les crois d'ailleurs aſſez éxactes. M. Couſin, habile Mathématicien, qui a bien voulu m'aider dans le calcul de ces Tables, s'en étant ſervi pour déterminer pluſieurs lieux de la Lune, n'a jamais trouvé une minute de différence entre le calcul & l'obſervation.

Enfin, dans le quinziéme Mémoire, j'applique à la Lune, regardée comme un ſphéroïde dont les Méridiens & l'Equateur ſeroient des ellipſes, la théorie que j'ai donnée dans les Mémoires de l'Académie de 1754 ſur la préceſſion

des points équinoxiaux dans de pareils ſphéroïdes. Je joins à cette application différentes remarques ſur la libration de la Lune, ſur les mouvemens que peut avoir ſon axe, & même ſur le Problême de la préceſſion des Equinoxes en général.

Telles ſont les différentes matieres traitées dans ces *Opuſcules*. La plûpart des Mémoires qu'elles contiennent, peuvent fournir le ſujet de pluſieurs autres, comme il eſt aiſé de s'en convaincre en les liſant; & je me propoſe de donner de tems en tems une ſuite à ces deux Volumes, autant que mes autres occupations pourront me le permettre.

Au reſte, je me flatte que les ſavans Géometres, dont j'ai cru pouvoir attaquer les aſſertions, preſque toujours pour ma propre défenſe, ne m'en ſauront pas mauvais gré; en combattant leurs opinions, je ſai tous les égards que je dois à leur perſonne & à leur mérite, & je ne crois pas m'en être écarté.

TABLE
DES MÉMOIRES
Contenus en ce premier Tome.

PREMIER MÉMOIRE.

Recherches sur les vibrations des cordes sonores, Pag. 1

SUPPLÉMENT *au Mémoire précédent sur les cordes vibrantes.* pag. 65

SECOND MÉMOIRE.

Du Mouvement d'un Corps de figure quelconque, animé par des forces quelconques; pag. 74

TROISIÉME MÉMOIRE.

Recherches sur les oscillations d'un corps quelconque qui flotte sur un fluide; pag. 104

§. I. *Des oscillations des Figures planes;* pag. 106

§. II. *Des oscillations planes d'un corps irrégulier,* pag. 122

§. III. *Des oscillations d'un corps solide quelconque de figure irréguliere.* pag. 125

QUATRIÉME MÉMOIRE.

Réflexions sur les Loix du mouvement des fluides, p. 137

CINQUIÉME MÉMOIRE.

Démonſtration du principe de la compoſition des Forces, pag. 169

SIXIÉME MÉMOIRE.

Sur les Logarithmes des quantités négatives, pag. 180
SUPPLÉMENT *au Mémoire précédent, ſur les Logarithmes des quantités négatives*, pag. 210.

SEPTIÉME MÉMOIRE.

Supplément aux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Pruſſe de 1746 *&* 1748, pag. 231
De la ſurface des cônes obliques, pag. 234
De la ſurface d'un cône qui a pour baſe une Ellipſe, p. 236
ADDITION *au Mémoire précédent*, pag. 244

HUITIÉME MÉMOIRE.

Remarques ſur quelques queſtions concernant l'attraction, pag. 246

NEUVIÉME MÉMOIRE.

Doutes ſur différentes queſtions d'Optique, pag. 265
SUPPLÉMENT *à l'Art.* 176 *du Traité de Dynamique, nouvelle Edition*, pag. 299

OPUSCULES

OPUSCULES MATHÉMATIQUES.

PREMIER MÉMOIRE.

Recherches sur les vibrations des Cordes sonores.

J'AI donné, dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Prusse pour l'année 1747, des recherches sur les vibrations des cordes sonores, qui ont été attaquées par Messieurs Bernoulli & Euler, dans les Mémoires de la même Académie pour l'année 1753. La lecture de leurs Mémoires & des miens suffiroit peut-être pour me mettre à couvert de leurs attaques; car chacun de ces grands Géometres, pris séparé-

ment, ſemble m'accorder ce que l'autre me nie. Néanmoins la difficulté de la queſtion, qui ne peut avoir que très-peu de Juges, & le nom de mes deux Adverſaires, m'engagent à ſoumettre au jugement des Savans les objets de notre conteſtation. Je donnerai d'abord une ſolution nouvelle du Problême des cordes vibrantes, encore plus ſimple que celle que j'ai déja donnée dans les Mémoires déja cités; j'y joindrai quelques remarques relatives à cette ſolution, & l'application de ma méthode à différens Problêmes ſur les vibrations des cordes ſonores; je répondrai enſuite aux objections de Meſſieurs Euler & Bernoulli.

§ I. Soit AMB (*Fig.* 1.) une corde en vibration, $AP = x$, $PM = y$, $AB = a$; on ſuppoſe que les vibrations ſont fort petites; ainſi on peut faire $Mm = dx$. L'ordonnée PM ne peut être qu'une fonction de l'abſciſſe x, & du tems t écoulé depuis le commencement du mouvement; & ſi on imagine que la corde ſe meuve de P vers M, & qu'on nomme F la force retardatrice du point M, p la peſanteur, θ le tems qu'un corps peſant mettroit à parcourir l'eſpace quelconque e, on aura $-\frac{ddy}{dt^2} = \frac{F \times 2e}{p\theta^2}$, équation dont le premier membre exprime le coëfficient de dt^2, lorſqu'on prend la différence ſeconde de y, en ne faiſant varier que t & en ſuppoſant dt conſtant.

Or la force retardatrice F eſt égale à la force de tenſion multipliée par l'angle de contingence en M, & di-

visée par la petite masse à mouvoir Mm ou dx. La force de tension peut être supposée $= pma$, c'est-à-dire, en raison de m à 1, avec le poids de la corde pa (a étant la longueur de la corde, & p la gravité); & l'angle de contingence est $-\frac{ddy}{dx}$, en ne faisant varier que x. Donc $F = -\frac{pmaddy}{dx^2}$; donc faisant la substitution, & supposant (ce qui est permis) $a = 1$, on aura $-\frac{ddy}{dt^2} = -\frac{ddy}{dx^2}$ ou $\frac{d\left(\frac{dy}{dt}\right)}{dt} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$; d'où il s'ensuit que si on fait $dy = p\,dt + q\,dx$, on aura $\frac{dp}{dt} = \frac{dq}{dx}$, & que par conséquent $p\,dx + q\,dt$ sera une différentielle exacte; aussi-bien que $p\,dx + q\,dt$; donc si on fait $du = p\,dx + q\,dt$, on aura $dy + du = p + q \cdot dx + dt$ & $dy - du = p - q \cdot dt - dx$; donc $y + u = \varphi(x + t)$ & $y - u = \Delta(x - t)$; donc $y = \frac{\varphi(x+t)}{2} + \frac{\Delta(x-t)}{2}$, ou plus simplement $y = \varphi(x + t) + \Delta(x - t)$; c'est l'équation générale des cordes vibrantes, attachées ou non par deux points fixes.

Sur cette solution si simple je ferai d'abord une remarque en passant. M. Euler, dans les Mémoires de l'Académie de Berlin 1753, est parvenu à la même équation que moi; mais, ce me semble, par une méthode

moins sûre ; de ce que $\frac{d\,d\,y}{d\,x^2} = \frac{d\,d\,y}{d\,t^2}$, il paroît en conclure que $\frac{k\,d\,y}{d\,x} = \frac{d\,y}{d\,t}$, k exprimant un nombre constant ; ce qui n'est pas vrai, comme on le peut voir aisément par la seule différentiation de l'équation $y = \varphi(x+t) + \Delta(x-t)$. Il est vrai que l'équation $\frac{k\,d\,y}{d\,x} = \frac{d\,y}{d\,t}$ donne $y = \varphi(x+t)$ & $y = \Delta(x-t)$; & qu'il arrive par hasard qu'en réunissant ces deux valeurs de y, on a la valeur générale de y qui répond à l'équation $\frac{d\,d\,y}{d\,t^2} = \frac{d\,d\,y}{d\,x^2}$; mais quoique la solution de M. Euler conduise à une conclusion vraie, elle n'en est pas, ce me semble, plus exacte pour cela, puisqu'elle semble appuyée sur l'hypothèse fausse que $\frac{d\,d\,y}{d\,x^2} = \frac{d\,d\,y}{d\,x^2}$ donne en général $\frac{d\,y}{d\,t} = \frac{k\,d\,y}{d\,x}$; je dis *en général* ; car si l'équation $\frac{d\,y}{d\,t} = \frac{k\,d\,y}{d\,x}$ ne convient pas à toutes les quantités auxquelles convient l'équation $\frac{d\,d\,y}{d\,x^2} = \frac{d\,d\,y}{d\,t^2}$, comment peut-on être sûr que l'intégration de cette équation $\frac{d\,y}{d\,t} = \frac{k\,d\,y}{d\,x}$, donnera la solution générale du Problême ?

La solution que M. Euler a donnée de ce même

Problême, dans les Mémoires de Berlin 1748, eſt plus exacte, mais elle ne differe point, comme il l'a remarqué lui-même, de celle que j'ai donnée dans les Mémoires de la même Académie pour l'année 1747.

Au lieu de l'équation $\frac{d\left(\frac{dy}{dt}\right)}{dt} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$, tirée de l'équation $\frac{ddy}{dt^2} = \frac{ddy}{dx^2}$, j'aurois pû écrire celle-ci, en apparence beaucoup plus générale, $\frac{d\left(\frac{dy}{dt} + \xi\right)}{dt} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx} + \vartheta\right)}{dx}$, ξ repréſentant une fonction quelconque de x, & ϑ une fonction quelconque de t; mais cette équation donne $p\,dx + d\xi + q\,dt + d\vartheta$ une différentielle complette, & par conſéquent $p\,dx + q\,dt$ pris ſéparément eſt auſſi une différentielle complette; donc l'équation ſubſtituée à $\frac{ddy}{dt^2} = \frac{ddy}{dx^2}$, eſt auſſi générale qu'on le peut ſouhaiter.

On pourroit croire au premier coup d'œil, que l'équation $y = \varphi(x+t) + \Delta(x-t)$ n'eſt pas auſſi générale qu'elle le peut être; car l'équation $y = \varphi(x+t) + \Delta(x-t) + Axx + Att + Cx + Dt + E$, qui eſt en apparence plus générale, ſatisfait également à l'équation différentielle $\frac{ddy}{dt^2} = \frac{ddy}{dx^2}$. Mais on peut remarquer que $Axx + Att = \frac{A}{2}(x+t)^2 + \frac{A}{2}$

$(x-t)^2$; que $Cx+Dt=F(x+t)+G(x-t)$, en supposant $F+G=C$, & $F-G=D$, ou $F=\frac{C+D}{2}$ & $G=\frac{C-D}{2}$; à l'égard de la constante E, elle est censée entrer dans l'une des deux quantités $\varphi(x+t)$ ou $\Delta(x-t)$; ainsi la valeur de y se réduit dans tous les cas à $\varphi(x+t)+\Delta(x-t)$.

§. II. Lorsque $x=o$, ou doit avoir $y=o$, quel que soit t; donc $\Delta-t=-\varphi t$; donc φt & $\Delta-t$ doivent être des fonctions impaires de t, toutes deux semblables & de signe contraire. Donc $y=\varphi(x+t)+\varphi(x-t)$.

On auroit pû trouver aussi par la méthode précédente $y=\varphi(x+t)-\Delta(t-x)$; & $y=\varphi(x+t)-\varphi(t-x)$; ce qui revient au même que la valeur qu'on vient de trouver; car $-\varphi(t-x)$ est la même chose que $\varphi(x-t)$, lorsque φ désigne une fonction impaire.

La valeur de y doit encore être $=o$, quel que soit t; lorsque $y=AB=a$; donc $\varphi(a+t)+\varphi(a-t)$ doit toujours être $=o$; donc φx doit être telle que si on y met successivement $a+t$ & $a-t$ pour x, la somme des deux résultats soit $=o$; or $y=2\varphi x$ est l'équation de la courbe initiale AMB, lorsque $t=o$; d'où l'on voit que la courbe AMB (*fig.* 2.) doit avoir au-dessous de l'axe AB une branche $B\mu a$ qui lui soit égale & semblable, ainsi qu'une branche Amb de l'autre côté de A, puisque φx est impaire. Donc la courbe initiale AMB

doit être telle, qu'elle ait des branches alternatives égales & ſemblables en ſens contraire à l'infini, toutes renfermées dans une même équation. Autrement le Problême ne pourra être réſolu, & ſe refuſera à l'analyſe. On peut voir dans les Mémoires de Berlin 1747, toutes les autres conſéquences que j'ai tirées de cette ſolution.

§. III. Si la courbe n'étoit pas ſuppoſée uniformément épaiſſe, enſorte que la variable X, qui exprime une fonction donnée de x, déſignât ſon épaiſſeur variable en chaque point, alors la maſſe à mouvoir Mm ne ſeroit plus dx, mais $X dx$, & l'on auroit pour équation $\frac{d\,d\gamma}{X\,dx^2} = \frac{d\,dy}{dt^2}$. Or ſi l'on fait $y = B\,c^{A\xi + Dt}$, B, A, D étant des conſtantes indéterminées, & ξ une fonction de x telle que $A^2\left(\frac{d\,d\xi}{dx^2} + \frac{d\xi^2}{dx^2}\right) = D^2 X$, on trouve que cette valeur de y ſatisfait à l'équation propoſée; donc en général ſi on ſuppoſe $y = B\,c^{A\xi + Dt} + B'\,c^{A'\xi + D't} + B''\,c^{A''\xi + D''t}$ &c. & ainſi à l'infini, ſi on le juge à propos; cette valeur de y ſatisfera à l'équation différentielle ci-deſſus, pourvû qu'on ait en général $\frac{A^2}{D^2} = \frac{A'^2}{D'^2} = \frac{A''^2}{D''^2}$ &c.

Suppoſons, pour rendre le calcul un peu plus facile, que $\xi = o$ quand $x = o$, & que $\xi = \alpha$ quand $x = \alpha$, il faudra que la valeur de y ſoit telle qu'en mettant o & α à la place de ξ, on ait $y = o$, quel que ſoit x; il faudra

de plus que $\frac{dy}{dt}$, c'eſt-à-dire, la viteſſe de chaque point, ſoit $= o$ lorſque $t = o$, quel que ſoit x. Pour ſatisfaire à ces conditions, nous prendrons en général $y = (Bc^{A\xi\sqrt{-1}} - Bc^{-A\xi\sqrt{-1}}) \times (Qc^{Et\sqrt{-1}} + Qc^{-Et\sqrt{-1}}) + (Fc^{2A\xi\sqrt{-1}} - Fc^{-2A\xi\sqrt{-1}}) \times (Hc^{2Et\sqrt{-1}} + Hc^{-2Et\sqrt{-1}})$ &c. & ainſi de ſuite à l'infini, ſi on le juge à propos, $A\xi$ exprimant 180 degrés, lorſque ξ ſera $= \alpha$. Or cette équation revient à cette forme plus ſimple, $y = K$ ſin. $A\xi \times L$ coſ. $Et + M$ ſin. $2A\xi \times N$ coſ. $2Et$ &c.

Au reſte l'équation $y = Bc^{A\xi + Dt} + B'c^{A'\xi + D't}$ &c. à l'infini, n'eſt pas la ſeule intégrale poſſible de l'équation propoſée $\frac{ddy}{Xdx^2} = \frac{ddy}{dt^2}$; il eſt aiſé de voir que cette équation en a d'autres, quoiqu'il ſoit peut-être très-difficile de trouver une formule générale qui les renferme toutes. Pour le prouver, nous ferons d'abord obſerver une propriété de l'équation différentielle dont il s'agit : voici en quoi cette propriété conſiſte. De ce que $\frac{ddy}{Xdx^2} = \frac{ddy}{dt^2}$, il s'enſuit que $pdt + qdx$ d'une part, & $qdt + pXdx$ de l'autre, ſont des différentielles complettes; ſoit à préſent $dp = rdt + sdx$, & on aura $\frac{dq}{dt} = \frac{dp}{dx}$, & $\frac{dq}{dx} = \frac{Xdp}{dt}$; par conſéquent $dq = sdt + rXdx$; qui ſera auſſi une différentielle

tielle complette ; par la même raiſon, ſi on fait $dr = \alpha\,dt + \zeta\,dx$, on aura $ds = \zeta\,dt + \alpha X\,dx$, & ainſi à l'infini ; par conſéquent on aura non-ſeulement $\frac{ddy}{X\,dx^2} = \frac{d.dy}{dt^2}$; mais encore $\frac{d\,dp}{X\,dx^2} = \frac{d.dp}{dt^2}$; $\frac{d\,dr}{X\,dx^2} = \frac{d.dr}{dt^2}$; ou, ce qui revient au même, $\frac{d^3y}{dt.X\,dx^2} = \frac{d^3y}{dt^3}$; $\frac{d^4y}{dt^2.X\,dx^2} = \frac{d^4y}{dt^4}$; &c. Ce qui peut d'ailleurs ſe démontrer directement par le moyen de la ſeule équation primitive $\frac{ddy}{X\,dx^2} = \frac{ddy}{dt^2}$, qui donne à l'infini $\frac{d^ny}{X\,dx^2.dt^{n-2}} = \frac{d^ny}{dt^n}$; ou $\frac{d^ny}{dt^{n-2}\,X\,dx^2} = \frac{d^ny}{dt^n}$; car c'eſt la même choſe de différentier d'abord y, $n-2$ fois en ne faiſant varier que t, & enſuite deux fois en ne faiſant varier que x, ou de le différentier d'abord deux fois en ne faiſant varier que x, & enſuite $n-2$ fois en faiſant varier ſeulement t.

Donc on aura les différentielles complettes deux à deux

$$\left.\begin{matrix} dy = p\,dt + q\,dx \\ \& \\ q\,dt + p\,X\,dx \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} dp = r\,dt + s\,dx \\ \& \\ s\,dt + r\,X\,dx \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} dr = \alpha\,dt + \zeta\,dx \\ \& \\ \zeta\,dt + \alpha\,X\,dx ; \end{matrix}\right.$$

& ainſi à l'infini ; de ſorte que ſi on trouve un ſeul cas d'intégrabilité, on pourra, en remontant, en trouver d'autres à l'infini. Par exemple, on trouve (en faiſant $X\,dx = dz$) que ſi $\alpha = A + Bt + Gx$, & $\zeta = R + Gt + Bz$, dr & $\zeta\,dt + \alpha\,X\,dx$ ſeront l'une & l'autre

des différentielles complettes; d'où l'on trouvera en remontant p, y, &c. ce qui donneroit d'autres valeurs de y que celles qui ſont renfermées dans l'équation $y =$ $y = B\,c^{A\xi + Dt} + B'\,c^{A'\xi + D't}$ &c. Il eſt vrai que ces valeurs ne ſatisferoient point au préſent Problême, parce qu'elles ne ſeroient pas $= o$ quand $x = o$ & quand $x = a$, comme il eſt néceſſaire qu'elles le ſoient, quelque valeur qu'on donne à t; mais c'en eſt aſſez pour faire voir que la ſolution donnée ci-deſſus n'eſt pas générale.

Si on ſuppoſe $\alpha = \theta\,\xi$, $\zeta = \theta'\,\xi'$, θ & θ' étant des fonctions de t, & ξ, ξ' des fonctions de x, on trouvera que $\frac{\theta\,d\,\xi}{d\,x} = \frac{\xi'\,d\,\theta'}{d\,t}$; & $\frac{\theta'\,d\,\xi'}{X\,d\,x} = \frac{\xi\,d\,\theta}{d\,t}$; d'où l'on tire $\frac{d\,\xi}{\xi'\,d\,x} = \frac{d\,\theta'}{\theta\,d\,t} = A$, A étant une conſtante, & $\frac{d\,\xi'}{\xi\,X\,d\,x} = \frac{d\,\theta}{\theta'\,d\,t} = B$, B étant auſſi une conſtante; par conſéquent $\theta = -\frac{d\,\theta'}{A\,d\,t}$, & $dd\,\theta' = AB\,\theta'\,dt^2$; & par la même raiſon $\xi' = \frac{d\,\xi}{A\,dx}$ & $dd\,\xi = AB\,\xi\,X\,dx^2$. Or ſi ni A ni B n'eſt $= o$, on tirera de ces équations une valeur de y toute ſemblable à celle-ci, $y = B\,c^{A\xi + Dt}$ &c. Si A ou B eſt $= o$, on trouvera 1°. dans le cas de $A = o$, $d\,\theta' = o$, $\theta' = G$, $d\,\theta = B\,G\,dt$, & $\theta = B\,G\,t + H$; 2°. dans le cas de $B = o, d\theta = o, \theta = L; d\theta' = AL\,dt$, & $\theta' = ALt + M$;

& par la même raiſon, en faiſant $X\,dx = d\zeta$, on aura dans le premier cas $\xi = N$ & $\xi' = BN\zeta + P$; & dans le ſecond cas $\xi' = Q$ & $\xi = AQ\zeta + R$; donc dans le premier cas $\alpha = NBGt + NH$, & $\zeta = GBN\zeta + GP$; & dans le ſecond cas $\alpha = LAQ\zeta + LR$, & $\zeta = ALQt + QM$; ce qui eſt encore un cas d'une des ſolutions données ci-deſſus. Mais aucune de ces ſolutions n'eſt générale, comme il eſt aiſé de le ſentir. Revenons donc à notre ſujet.

§. IV. Si la courbe vibrante AMB, au lieu d'être une corde fléxible & tendue, fixe par ſes deux extrémités A, B, eſt un reſſort fixé ſeulement en A & écarté par quelque puiſſance de la ſituation AB; on peut trouver ſon mouvement par la méthode ſuivante.

On conſidérera d'abord que le reſſort dans ſon mouvement tourne ſa convexité vers l'axe AB, & non ſa concavité, comme la corde vibrante; on pourra ſuppoſer de plus, au moins dans un très-grand nombre de cas, que la force qui agit ſur chaque point eſt en raiſon de l'angle de courbure, c'eſt-à-dire qu'elle eſt $+\frac{ddy}{dx}$, & non pas, comme dans le Problême précédent, $-\frac{ddy}{dx}$, parce que dans ce Problême la courbe étoit ſuppoſée concave vers AB, & qu'ici elle eſt convexe. Ainſi on aura $-\frac{ddy}{dt^2} = \frac{ddy}{dx^2}$ pour l'équation de la lame à reſſort vibrante. Or faiſant $t\sqrt{-1} = u$, il

vient $\frac{d\,dy}{d\,u^2} = \frac{d\,dy}{d\,x^2}$; donc $y = \varphi(x+u) + \Delta(x-u)$ ou $y = \varphi(x+t\sqrt{-1}) + \Delta(x-t\sqrt{-1})$; & comme $x = o$ rend toujours $y = o$, il s'enſuit que $y = \varphi(x+t\sqrt{-1}) + \varphi(x-t\sqrt{-1})$ ou $\varphi(x+t\sqrt{-1}) - \varphi(t\sqrt{-1}-x)$, φx étant une fonction impaire.

Si la fonction φx eſt telle qu'en ſubſtituant à la place de t une certaine valeur donnée ϑ, on ait $\varphi(x+\vartheta\sqrt{-1}) + \varphi(x-\vartheta\sqrt{-1}) = o$, quel que ſoit x, c'eſt-à-dire que le coëfficient de chaque terme ſoit $= o$, alors il eſt évident qu'au bout du tems ϑ, tous les points de la lame vibrante arriveront en même tems à la ſituation rectiligne. En ce cas il eſt aiſé de voir que $y = \varphi x$ ne peut exprimer une courbe géométrique, parce que φx renfermera néceſſairement une infinité de termes. Car on s'aſſurera facilement par le calcul, que la condition dont il s'agit, ne peut avoir lieu, ſi φx eſt une fonction Algébrique & finie.

La condition dont nous parlons aura lieu, par exemple, ſi $y = (Ac^{Bx} - Ac^{-Bx}) \times D$ cof. $Bt + (Ec^{3Bx} - Ec^{-3Bx}) \times H$ cof. $3Bt +$ &c. & ainſi de ſuite à l'infini, ſi on le juge à propos.

Cette équation eſt donc une de celles que doit avoir la lame vibrante, pour que tous ſes points faſſent leurs demi-vibrations en même tems.

M. Daniel Bernoulli trouve dans les Mémoires de

Peterſbourg, *Tom.* 13, une équation fort différente de celle-ci pour celle de la lame vibrante, dans le cas où les demi-vibrations de chaque point ſont ſynchrones. Cette équation eſt $d^4y = Ay\,dx^4$. Je ne nie pas qu'elle ne puiſſe abſolument avoir lieu dans certains cas; mais 1°. M. Bernoulli ſuppoſe que la force accélératrice doit être proportionnelle à l'ordonnée y, comme M. Taylor l'a ſuppoſé dans le Problême des cordes vibrantes. Or la ſuppoſition de M. Taylor eſt trop limitée, comme nous l'avons fait voir dans les Mémoires de Berlin 1747, & il ne paroît pas que l'hypotheſe de M. Bernoulli ſoit plus fondée en raiſon. 2°. M. Bernoulli fait encore cette autre ſuppoſition, que dans un reſſort bandé, l'angle de contingence eſt égal à la ſomme des momens de toutes les puiſſances tendantes. Or cette ſuppoſition ne me paroît pas ſuffiſamment appuyée, quoiqu'elle ſoit le fondement ordinaire ſur lequel on réſout le Problême de la courbe élaſtique; car dans un corps à reſſort, & par conſéquent fléxible, j'avoue que je ne puis me former d'idée nette de ces *momens* dont on parle, & qui ne doivent avoir lieu que dans un corps abſolument infléxible. Un reſſort ne doit être regardé, ni comme un corps parfaitement fléxible, ni comme un corps abſolument infléxible; & j'oſerois aſſurer par cette raiſon, que toutes les ſolutions qu'on donnera du Problême de l'Elaſtique, ſeront très-imparfaites, juſqu'à ce qu'on ait trouvé la véritable loi de la réſiſtance des reſſorts pliés.

Si la lame vibrante n'étoit pas par-tout de la même épaiſſeur, on auroit $-\frac{d\,d\,y}{X\,d\,x^2} = \frac{d\,d\,y}{d\,t^2}$, & $y = Bc^{A\xi + Dt\sqrt{-1}} + B'c^{A'\xi + D't\sqrt{-1}}$ &c. comme ci-deſſus, avec ces conditions que $A^2\left(\frac{d\,d\,\xi}{d\,x^2} + \frac{d\,\xi^2}{d\,x^2}\right) = -D^2 X$, & que $\frac{A^2}{D^2} = \frac{A'^2}{D'^2}$ &c. d'où l'on tire $y = (Bc^{A\xi} - Bc^{-A\xi})\,Q$ cof. $E\,t + (Fc^{2A\xi} - Fc^{-2A\xi})\,H$ cof. $2\,E\,t$ &c. & ainſi de ſuite à l'infini, ſi on le juge à propos; & pour le cas où toutes les demi-vibrations doivent être d'égale durée, $y = (Bc^{A\xi} - Bc^{-A\xi})\,Q$ cof. $E\,t + (Fc^{3A\xi} - Fc^{-3A\xi})\,H$ cof. $3\,E\,t +$ &c.

§. V. Je viens préſentement à l'examen de la ſolution de M. Euler, pour le cas de la corde vibrante uniformément épaiſſe. Nous avons vû ci-deſſus que dans l'équation $y = \varphi(x + t) + \varphi(x - t)$, les deux fonctions déſignées par φ doivent être impaires & ſemblables. M. Euler convient de cette aſſertion. Il dit expreſſément que les fonctions $\varphi(x + t)$ & $\varphi(x - t)$ doivent être *identiques*, & il ajoute que φx doit être une fonction *impaire*, c'eſt-à-dire, *ne renfermer que des puiſſances impaires de* x.

Cependant pour trouver en général la valeur de y, voici la conſtruction qu'il donne. Suppoſant que AMB (*Fig.* 2.) ſoit la figure initiale de la corde, il tranſporte

cette figure alternativement au-deſſus & au-deſſous de l'axe en $A m b$, $B \mu a$, & ainſi de ſuite à l'infini; enſuite pour ſavoir quelle ſera la valeur de y, ou la diſtance du point M à AB au bout du tems t, il prend $PQ = s$ & $PR = t$, & $y = \frac{QN}{2} + \frac{RS}{2}$, RS étant conſidérée comme négative, ſi elle tombe de l'autre côté de l'axe par rapport à PM. J'ai prétendu que cette conſtruction ne pouvoit avoir lieu, que quand les courbes AMB, $B \mu a$, Amb, &c. & ainſi à l'infini, étoient liées par une même équation, & aſſujetties à la loi de continuité; M. Euler ſoutient que cette conſtruction eſt générale, quelle que ſoit la courbe AMB. C'eſt le ſeul point ſur lequel nous différons.

§. VI. Je ne conçois pas d'abord pourquoi M. Euler prétend que la courbe AMB peut être telle qu'on voudra; puiſqu'il dit lui-même expreſſément que φx ne doit contenir que des *puiſſances impaires de* x; ainſi $y = 2\varphi x$, qui eſt l'équation de la courbe initiale AMB lorſque $t = o$, ne doit contenir que des puiſſances impaires de x. Par cette ſeule reſtriction, il ſeroit déja obligé d'exclure de ſa ſolution générale tous les cas où l'équation de la courbe AMB renferme quelques puiſſances paires; ceux, par exemple, où la courbe AMB ſeroit une Parabole ayant pour équation $y = qax - qxx$, dans laquelle q eſt ſuppoſé un coëfficient fort petit. Mais ce n'eſt pas tout; M. Euler dit encore que les fonctions $\varphi(x + t)$ & $\varphi(x - t)$ doivent être

identiques; il insiste à plusieurs reprises sur la nécessité absolue de cette identité. Or il est aisé de voir, que si les courbes AMB, Amb, $B\mu a$ &c. ne sont pas assujetties à une même équation, ces deux fonctions ne seront pas identiques, même dans le cas où $\varphi(x)$ seroit une *fonction impaire*. En effet, soit, par exemple, AMB (*Fig.* 3.) une portion de Parabole cubique, telle que $y = a^2 x - x^3$, & soit $PQ = t$, $PQ' = t$, on aura $Q'S'$ ou $\varphi(x+t) = aQ' \times (a^2 - aQ'^2) =$ (à cause de $AQ' = x+t$) $(2a - x - t)(aa - 2a - x - t^2) = 11a^2(x+t) - 6a^3 - 6a(x+t)^2 + (x+t)^3$; & QS ou $\varphi(x-t) = a^2(x-t) - (x-t)^3$; donc $\varphi(x+t)$ & $\varphi(x-t)$ ne sont pas identiques dans la construction de M. Euler, quoique ces deux fonctions doivent l'être, selon lui-même. M. Euler répondra peut-être, que par fonctions identiques, il n'entend pas ici ce qu'on entend d'ordinaire, des fonctions dans lesquelles $x+t$ & $x-t$ entrent de la même maniere; mais seulement des fonctions telles, que si l'on prend $x+t = x'-t$ (les abscisses x & x' étant différentes) on ait $\varphi(x+t) = \varphi(x'-t)$; c'est-à-dire l'ordonnée qui répond à $x+t$ égale à celle qui répond à $x'-t$, sans qu'il soit nécessaire d'ailleurs que $\varphi(x+t)$ soit de la même forme que $\varphi(x'-t)$. Nous prouverons dans la suite que cette réponse ne mettroit pas à couvert la solution de M. Euler. Mais commençons par donner des preuves directes de l'insuffisance de cette solution.

§. VII. Nous allons donc démontrer que la construction

tion de M. Euler ne satisfait point en général à l'équation $\frac{d\,d\,y}{d\,x^2} = \frac{d\,d\,y}{d\,t^2}$. Pour cela soit pris $AP = x$, (*Fig.* 4.), $PT = t$ sur l'axe AB; donc regardant x comme constante, & faisant $PT' = PT$, $Tt = t\theta = T't' = t'\theta' = dt$, on aura $AT = x + t$, $At = x + t + dt$, $A\theta = x + t + 2\,dt$, $AT' = x - t$, $At' = x - t - dt$, $A\theta' = x - t - 2\,dt$. Or y étant égale, suivant la construction même de M. Euler, à la demie ordonnée TR qui répond à $x + t$, plus à la demie ordonnée $T'R'$ qui répond à $x - t$, il s'ensuit que $d\,d\,y$, en ne faisant varier que t, est $\frac{\theta\,\varrho - t\,r - (t\,r - TR)}{2}$ $+ \frac{\theta'\,\varrho' - t'\,r' - (t'\,r' - T'R')}{2}$; donc $\frac{d\,d\,y}{d.\,t^2} = \frac{\theta\,\varrho + TR - 2\,t\,r}{2\,T\,t^2} + \frac{\theta'\,\varrho' + T'R' - 2\,t'\,r'}{2\,T\,t^2} =$ (en menant les cordes $R\,\rho$, $R'\,\rho'$) $\frac{-r\,o - r'\,o'}{T\,t^2}$. Maintenant faisons t constante & $= PT$, & x variable; prenons $P\,p = p\,\pi = d\,x$, & supposons $d\,x = T\,t$, ce qui est évidemment permis, nous aurons 1°. $At = x + t + dx$, $A\theta = x + t + 2\,dx$; 2°. faisant $T'\,t'' = t''\,\theta'' = Pp = T\,t$, nous aurons $A\,t'' = x + dx - t$, $A\,\theta'' = x + 2\,dx - t$; donc menant la corde $R'\,\rho''$, on trouvera que $d\,d\,y$, en ne faisant varier que x, est $-r\,o - r''\,\omega$; donc $\frac{d\,d\,y}{d\,x^2} = \frac{-r\,o - r''\,\omega}{P\,p^2}$. Il faut donc, pour que $\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}$

ſoit égal à $\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}$, que $r'\,o'$ ſoit $= r''\,\omega$, ou, ce qui eſt la même choſe, que la courbure au point r'' ſoit la même que la courbure au point r' infiniment proche; donc ſi la figure initiale de la courbe $A\,M\,B$ eſt telle, que le rayon oſculateur change bruſquement en quelqu'un des points de cette courbe, la conſtruction de M. Euler n'aura pas lieu. Premier cas où cette conſtruction eſt fautive, quoique ce grand Géometre la prétende générale & ſans exception.

§. VIII. Second cas où cette même conſtruction eſt fautive; c'eſt celui où la courbure en A ne ſera pas infiniment petite; car alors en tranſportant, ſuivant la conſtruction de M. Euler, la courbe $A\,M$ en $A\,G$ dans une poſition contraire, on formera une courbe dont la courbure fera un ſaut en A, & qui par conſéquent retombera dans le cas précédent. On dira peut-être que ce cas n'eſt pas le même, parce que la courbure eſt égale aux points Q, Q', quoique les rayons oſculateurs y ſoient dirigés en ſens contraire. Pour répondre à ce ſubterfuge, je remarque qu'à la vérité les petites lignes $Q\,q$, $Q'\,q'$ ſont égales en prenant $A\,L = L\,l = A\,L' = L'\,l'$, mais qu'elles doivent être priſes avec des ſignes différens. Car ſoit $P\,T$ & $P\,T' = A\,P$, on a (en ne faiſant varier que t) $\frac{d\,d\,y}{d\,t^2} = \frac{\theta\,\varrho + T\,R - 2\,t\,r}{2\,T\,t^2} + \frac{l'\,s' - 2\,L'\,Q'}{2\,T\,t^2} = \frac{-r\,o + Q'\,\bar{q}'}{T\,t^2}$, & non pas

$\frac{-ro - Q'q'}{T t^2}$, parce que $l' s' - 2Q' L' = -2Q' q'$; & que $l' s'$ & $Q' L'$ doivent être prises négativement par leur position & par la construction de M. Euler. Maintenant, en ne faisant varier que x, on aura $\frac{d\,dy}{dx^2} = \frac{-ro - Qq}{dt^2}$; donc $\frac{d\,dy}{dx^2}$ ne sera pas $= \frac{d\,dy}{dt^2}$, si la courbure n'est pas nulle en A. Second cas où la construction de M. Euler n'a pas lieu.

§. IX. Troisiéme cas où elle n'a pas lieu, & par les mêmes raisons, c'est celui où la courbure n'est pas nulle en B. Cela se prouve comme dans l'article précédent, en imaginant, si l'on veut, l'origine des x transférée en B, pour rendre la démonstration plus simple. Donc en général, toutes les fois que la courbe AMB aura des sauts dans sa courbure, ou que la courbure ne sera pas nulle tant en A qu'en B, la construction de M. Euler n'aura pas lieu.

§. X. Pour rendre les démonstrations précédentes encore plus convaincantes, s'il est possible, je vais démontrer encore d'une autre maniere, que l'équation $\frac{d\,dy}{dx^2} = \frac{d\,dy}{dt^2}$, n'a point lieu dans la construction de M. Euler. Pour cela je considere que dans la solution générale $d\,dy$ (en ne faisant varier que x) est la différence seconde de trois ordonnées consécutives, dont l'une répond à l'abscisse $x - dx$, l'autre à l'abscisse x, la troisiéme à l'abscisse $x + dx$; en effet le sommet de

l'angle de contingence $\frac{d\,d\,\gamma}{d\,x}$ eſt ſuppoſé (dans la ſolution générale) à l'extrêmité de l'ordonnée qui répond à l'abſciſſe x. De plus $d\,d\,y$, en ne faiſant varier que t, eſt la différence ſeconde (ſuivant la même ſolution) de trois ordonnées répondantes à la même x, la premiere pour le tems $t - d\,t$, la ſeconde pour le tems t, la derniere pour le tems $t + d\,t$; ainſi (*Fig.* 5.) faiſant $A\,P = x$, $P\,T = P\,T' = t$, $P\,p = P\,\pi = T\,\theta = T'\,\theta' = dx$, on aura $\frac{d\,d\,y}{dx^2} = \frac{-R\,o}{P\,p^2} - \frac{R'\,o'}{P\,p^2}$; faiſons maintenant (*Fig.* 6.) $T\,\vartheta = T\,\tau = T'\,\tau' = T'\,\vartheta' = d\,t$, en ſuppoſant, ce qui eſt permis, non plus $d\,t = d\,x$, mais $d\,t$ différent de $d\,x$, plus grand ou plus petit à volonté; on aura $\frac{d\,d\,y}{d\,t^2} = \frac{-R\,\Omega - R'\,\omega}{T\,\vartheta^2}$; d'où il eſt aiſé de voir que $\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}$ ne ſera point égal à $\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}$, ſi la loi de la courbure n'eſt pas uniforme. Car ſi, par exemple, la courbure faiſoit des ſauts en quelque point de l'arc $o'\,R\,S'$ (*Fig.* 7.), on ne pourroit regarder $\frac{R'\,\omega}{T'\,\vartheta'^2}$ comme égale à $\frac{R'\,o'}{T'\,\theta'^2}$; cela eſt aſſez éclair par ſoi-même; car ce n'eſt que dans un arc de courbure uniforme qu'on a $\frac{R'\,o'}{T'\,\theta'^2} = \frac{R'\,\omega}{T'\,\vartheta'^2}$. Mais pour le démontrer ſans réplique, ſoient menées les cordes $o'\,R'$, $p'\,R'$ prolongées juſqu'en L & en Q, il

eſt clair que $S' L = 2 R' u$, & $r' V = 2 R' o'$, puiſque (*hyp.*) $T' \tau' = T' \vartheta'$, & $T' t' = T' \theta'$; ainſi il ſuffira de prouver que $\frac{L S'}{T' \vartheta'^2}$ n'eſt point égal à $\frac{V r'}{T' \theta'^2}$ ſi la courbure n'eſt pas uniforme dans l'arc $o' R' S'$. Pour cela, ſuppoſons que le point r' ſoit celui où la courbure fait un ſaut; enſorte que $o' R' r'$, $r' S'$ ſoient deux arcs de cercle contigus, infiniment petits, de différente courbure, & ayant une tangente commune en r'; ſoit tirée la tangente $R' Z$, & ſoit continué l'arc $o' R' r'$ en $r' S''$; ſoit r le rayon de l'arc $o' R' r' S''$; on aura 1°. $Z S'' = r' u \times \frac{T' \vartheta'^2}{T' \theta'^2}$; 2°. $\frac{V u}{R' V} =$ angl. $V R' u = \frac{R' \varrho'}{2 r}$ & par conſéquent $V u = \frac{R' \varrho'^2}{2 r}$; 3°. $Q Z = \frac{V u . T' \vartheta'}{T' \theta'} = \frac{T' \theta' \times T' \vartheta'}{2 r}$; 4°. $Q L = \frac{K V \times T' \vartheta'}{T' \theta'} = \frac{T' \theta' \times \varrho' \sigma'}{2 r} \times \frac{T' \vartheta'}{T' \theta'} = \frac{T' \vartheta' \times \varrho' \sigma'}{2 r}$; donc $S'' L = \frac{r' u \times T' \vartheta'^2}{T' \theta'^2} + \frac{V u \times T' \vartheta'}{T' \theta'} + \frac{V u \times K V}{V u} \times \frac{T' \vartheta'}{T' \theta'} = \frac{r' u \times T' \vartheta'^2}{T' \theta'^2} + V u \times \left(\frac{T' \vartheta'}{T' \theta'} + \frac{T' \vartheta' - T' \theta'}{T' \theta'} \times \frac{T' \vartheta'}{T' \theta'} \right) = (r' u + V u) \frac{T' \vartheta'^2}{T' \theta'^2} = \frac{V r' \times T' \vartheta'^2}{T' \theta'^2}$; donc $\frac{S'' L}{T' \vartheta'^2}$ eſt égal à $\frac{V r'}{T' \theta'^2}$; donc puiſque $S' L = S'' L + S' S''$, & que $S' S''$ eſt du même ordre d'infiniment petit que $S'' L$, il s'enſuit que $\frac{S' L}{T' \vartheta'^2}$

n'eſt pas égal à $\frac{V r'}{T' \theta'^2}$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

§. XL. Ne nous en tenons pas aux preuves de calcul, & joignons-y des preuves d'un autre genre, plus frappantes pour tous les Lecteurs. Voici la véritable raiſon métaphyſique, ſi je ne me trompe, pourquoi le mouvement de la corde ne peut être ſoumis à aucun calcul analytique, ni repréſenté par aucune conſtruction, quand la courbure fait un ſaut en quelque point *M* (*Fig.* 2.). C'eſt que dans ce cas il y a proprement au point *M* deux rayons oſculateurs différens, quoique coincidens quant à la direction, dont l'un appartient à la portion de courbe *M N*, l'autre à la portion de courbe *M A*. Or la force accélératrice en chaque point de la corde étant en raiſon inverſe du rayon oſculateur, lequel des deux rayons communs au point *M* doit ſervir à déterminer la force en ce point *M*? C'eſt ce qu'il eſt impoſſible de fixer, & il l'eſt par conſéquent auſſi de réſoudre le Problême dans ce cas-là. En effet ſuppoſons que la figure initiale de la corde ſoit compoſée de deux différentes courbes ainſi réunies en *M*; je demande à M. Euler quelle eſt la force accélératrice du point *M*, lorſque la corde commence à ſe mouvoir? Voilà donc la raiſon métaphyſique qui rend fautive la ſolution de M. Euler, lorſque la courbure de la courbe fait quelques ſauts. Voici maintenant pourquoi cette ſolution eſt fautive, lorſque la courbure n'eſt pas nulle, ſoit en *A*, ſoit en *B*. Soit *A B* (*Fig.* 8.) l'axe de la corde, *A M B* la

courbe initiale, PT le tems écoulé depuis le commencement du mouvement, & tel que le point T ſoit infiniment proche de B, $Tt = BT$; $B\theta = BT$, $PT' = PT$, $Pt' = Pt$; $PB' = PB$, $P\theta' = P\theta$; ſoit enfin $Tt = dt$; la conſtruction de M. Euler donne depuis la fin du tems $t - dt$ ou Pt, juſqu'à la fin du tems $t + dt$, la valeur de ddy (priſe en ne faiſant varier que t) $= \frac{ts - 2TS + B'Q' - 2T'S + t's'}{2}$; ce ddy eſt l'eſpace parcouru en vertu de la force accélératrice durant le tems dt, & repréſente cette force; & dans l'inſtant ſuivant le ddy, & par conſéquent la force accélératrice eſt $\frac{TS - \theta\sigma + T'S' - 2B'Q' + \theta'\sigma'}{2}$.

Maintenant ſi la courbure eſt finie en B, comme on le ſuppoſe, imaginons la courbe AMB continuée en $B\Sigma\beta$, enſorte que les parties $B\Sigma\beta$, AMB ſoient liées par la même équation, il eſt viſible que $\Sigma\sigma$ ſera un infiniment petit du ſecond ordre, du même ordre que ddy; il eſt aiſé de voir de plus que les deux ddy conſécutifs, qu'on vient d'aſſigner, différeront de la quantité $\frac{\Sigma\sigma}{2}$, qui eſt du même ordre qu'eux. Donc la force accélératrice du point M, lorſque $PT = t$, paſſeroit bruſquement & ſans degrés, de la valeur qu'elle a en cet inſtant, à une autre valeur qui différe de celle-là d'une quantité du même ordre; ce qui eſt choquant, puiſque la nature de la force accélératrice eſt de croître ou de décroître par degrés inſenſibles, & non bruſque-

ment & par ſauts. Envain objecteroit-on que la *loi de continuité* n'eſt pas une loi générale, puiſqu'elle ne s'obſerve pas dans le choc des corps, même des corps élaſtiques. Je le ſais, & je ſuis même, ſi je ne me trompe, le premier qui aye fait cette importante remarque (*); je ſais encore que les loix du choc des corps ſont ſoumiſes au calcul analytique, quoique la loi de continuité n'y ait pas lieu. Mais le cas eſt bien différent; il s'agit ici d'une ſuite de points liés enſemble, dont le mouvement eſt ſuppoſé aſſujetti à une même équation analytique, & par conſéquent ne doit point ſouffrir de ſauts, parce que l'analyſe n'en ſouffre pas. Envain objecteroit-on encore que les ſauts dont il s'agit, doivent être regardés comme nuls, parce qu'ils ne ſe font que dans des parties infiniment petites. Avec un pareil raiſonnement, on ſoutiendroit qu'une courbe peut avoir des ſauts dans ſa courbure, parce que ces ſauts ne ſe faiſant que dans des parties infiniment petites, ils ſont cenſés s'évanouir. Je ne crois pas cependant qu'aucun Géometre voulût admettre une pareille aſſertion. La raiſon en eſt bien ſimple; c'eſt que s'il y avoit un ſaut dans le ddy, il y en auroit un dans le $\frac{ddy}{dx^2}$, qui eſt une quantité finie; ce qui ſeroit abſurde.

§. XII. A cette conſidération, ajoutons-en une nou-

(*) Voyez les Mémoires de Berlin 1751, To. 7, pag. 338, & l'Eloge que j'ai publié de M. Jean Bernoulli en 1748.

velle,

velle. Qu'on ſe repréſente la corde au commencement de ſon mouvement ; ſi la courbure n'eſt pas nulle en B, le rayon oſculateur y ſera donc fini ; par conſéquent la force accélératrice y ſera auſſi finie, & tendra à donner du mouvement au point B ; cependant ce point étant fixement arrêté, eſt incapable de ſe mouvoir ; ainſi d'un côté $\frac{d\,dy}{dx^2}$ eſt finie lorſque $x = AB$, & lorſque $t = o$; & de l'autre $\frac{d\,dy}{dt^2}$ eſt toujours $= o$ au point B quelle que ſoit la valeur de t ; c'eſt encore-là une raiſon convaincante pourquoi la ſolution ne peut avoir lieu, lorſque la courbure eſt finie en B. La nature en ce point arrête, pour ainſi dire, bruſquement le calcul ; on a deux forces accélératrices voiſines & infiniment peu différentes, l'une au point B, l'autre au point infiniment proche de celui-là ; la ſeconde de ces forces produit un mouvement, la premiere n'en ſçauroit produire, quoique par l'équation $\frac{d\,dy}{dx^2} = \frac{d\,dy}{dt^2}$ elle paroiſſe devoir en produire un, lorſque $\frac{d\,dy}{dx^2}$ n'eſt pas $= o$; ainſi la loi du mouvement n'étant pas continue pour tous les points de la courbe, ne peut être repréſentée avec exactitude par l'équation dont il s'agit. L'état forcé du point B au premier inſtant influe enſuite ſur les points voiſins, & ceux-là inſenſiblement ſur tous les autres ; enſorte que le mouvement de tous ces points ne ſçauroit être aſſujetti à une loi uniforme. Or il faut que la loi ſoit

uniforme pour pouvoir être exprimée & représentée par une équation analytique.

§. XIII. Pour répondre maintenant à la démonstration que M. Euler croit avoir donnée, pag. 212 & suiv. de l'égalité $\frac{d\,dy}{dx^2} = \frac{d\,dy}{dt^2}$, qu'il prétend être observée dans sa construction, il est bon d'examiner directement en quoi cette démonstration péche. Le voici : M. Euler suppose dans son calcul ce qui n'a pas lieu dans sa construction, savoir que $\varphi(x+t)$ & $\varphi(x-t)$ sont toujours de même forme. Pour le faire voir bien clairement, je suppose que $z = ax - xx$ soit l'équation de la courbe initiale. Par la construction de M. Euler, on aura (tant que x sera $>$ ou $= t$, & $x + t < a$) $y = \frac{a(x+t) - \overline{x+t}^2}{2} + \frac{a \cdot x - t - \overline{x-t}^2}{2}$; & quand x sera $< t$, on aura $y = \frac{a(x+t) - \overline{x+t}^2}{2} + \frac{a \cdot \overline{x-t} + \overline{x-t}^2}{2}$; où l'on voit que ces deux fonctions different en ce que quand x est $> t$, sans que $x + t$ soit $> a$, on a $-\overline{x-t}^2$, & quand x est $< t$, on a $+\overline{x-t}^2$. Donc si on a $x = t$, & qu'on fasse croître t des quantités dt & $2\,dt$, en ce cas, comme x est $< t + dt$ & $< t + 2\,dt$, on aura, en ne faisant varier que t, & en observant que $x - t = o$, les trois valeurs successives de y répondantes à t, $t + dt$, $t + 2\,dt$,

exprimées en cette ſorte ; $y = \frac{ax + at - \overline{x+t}^{2}}{2}$;

$y' = \frac{ax + at + adt - \overline{x+t}^{2} - 2dt.\overline{x+t}}{2} - \frac{dt^2}{2}$

$- \frac{adt}{2} + \frac{dt^2}{2}$; $y'' = \frac{ax + at + 2adt}{2} - \frac{\overline{x+t}^{2}}{2}$

$- \frac{4dt.\overline{x+t}}{2} - \frac{4dt^2}{2} - \frac{2adt}{2} + \frac{4dt^2}{2}$;

donc $\frac{ddy}{dt^2}$, ou $\frac{y'' + y - 2y'}{dt^2} = o$, comme il eſt aiſé de s'en aſſurer par le calcul. Donc $\frac{ddy}{dt^2} = o$. Maintenant faiſons augmenter x de la quantité dx & $2dx$; & comme $x + dx$ & $x + 2dx$ ſont $> x$, puiſque $x = t$ (hyp.) ; on aura, en ne faiſant varier que x, $y = \frac{ax + at}{2} - \frac{\overline{x+t}^{2}}{2}$ $y' = \frac{ax + at + adx}{2}$

$- \frac{\overline{x+t}^{2}}{2} - \frac{2dx.\overline{x+t}}{2} - \frac{dx^2}{2} + \frac{adx}{2}$

$- \frac{dx^2}{2}$; $y'' = \frac{ax + at}{2} - \frac{\overline{x+t}^{2}}{2} - \frac{4dx.\overline{x+t}}{2}$

$- \frac{4dx^2}{2} + \frac{2adx}{2} - \frac{4dx^2}{2}$; donc $\frac{ddy}{dx^2}$ ou

$\frac{y'' + y - 2y'}{dx^2} = \frac{-2dx^2}{dx^2} = -2$; donc $\frac{ddy}{dx^2}$ n'eſt pas $= \frac{ddy}{dt^2}$, même dans la démonſtration de M. Euler, parce que la quantité qu'il appelle $\frac{1}{2}\varphi''(x - \varepsilon)$ eſt ici $= o$ pour $\frac{ddy}{dt^2}$ & $= -2$ pour $\frac{ddy}{dx^2}$. Voici

en général à quoi tient la mépriſe de M. Euler; c'eſt que quand on exprime par φz, ainſi que ce grand Géometre, une fonction dont la forme n'eſt pas conſtante, il peut arriver, comme il arrive en effet ici, que deux valeurs de $\varphi'' z$ (c'eſt-à-dire de $\frac{d\varphi' z}{dz}$ ou $\frac{dd\varphi z}{dz^2}$) répondantes, l'une à z, l'autre à $z + dz$, different d'une quantité finie; or, pour que la démonſtration de M. Euler ait lieu, il faut que ces deux valeurs ne different jamais qu'infiniment peu; ſans quoi on ne pourroit ſuppoſer que $\varphi''(x - t)$ dans $\frac{dd\,y}{dx^2}$ eſt le même que dans $\frac{dd\,y}{dt^2}$.

§. XIV. Ainſi la conſtruction de M. Euler n'a pas lieu, toutes les fois que la courbure de la courbe AMB fait un ſaut en quelque point M, ou qu'elle n'eſt pas nulle, tant en A, qu'en B. Aucun de ces deux inconvéniens n'a lieu dans ma ſolution; car lorſque les courbes AMB (*Fig. 9.*), $B\mu a$, Amb &c. ſont aſſujetties à une même loi, 1°. la courbe AMB n'a point de ſauts dans ſa courbure, puiſque tous ſes points ſont aſſujettis à une même équation; 2°. la courbure en A & en B eſt nulle, puiſque la ſimilitude des parties AMB, $B\mu a$, Amb &c. donne à la courbe (ſuppoſée continue) un point d'inflexion en A & un en B, enſorte que la courbure eſt nulle en ces deux points.

§. XV. Il eſt donc démontré que la ſolution de M. Euler n'eſt pas auſſi générale qu'il le prétend; allons plus

loin, & prouvons que ſa conſtruction ne peut jamais avoir lieu que dans les cas où la ſuite infinie des courbes AMB, $B\mu\alpha$, Amb &c. eſt aſſujettie à la même équation.

Il eſt bon de prévenir d'abord une difficulté, dont la ſolution nous ſervira à ſimplifier la queſtion. Quelques Géometres fondés ſur le raiſonnement ſuivant, objecteront peut-être, qu'il ſuffit que les trois ſeules courbes ACB (*Fig. 9*), $A\gamma b$, $Bc\alpha$ ſoient aſſujetties à une même loi, ſans s'embarraſſer ſi cette même loi a lieu dans les autres courbes qu'on leur joint à l'infini. Il eſt certain, dira-t-on, que ſi les trois courbes ſont liées par une même équation, l'équation $\frac{d\,d\,y}{d\,t^2} = \frac{d\,d\,y}{d\,x^2}$ ſubſiſtera tant que t ne ſera pas plus grand que AB; il eſt certain de plus que quand t ſera $= AB$, la corde ACB ſera parvenue dans une ſituation $AC'B$ parfaitement ſemblable à ACB, mais ſeulement dans une poſition renverſée; enſorte que prenant $AP' = BP$, on aura $PM'' = P'M'$; cela eſt aiſé à prouver, puiſqu'en faiſant Pp & $P\pi = AB = t$, ce qui donne $\alpha\pi = Ap$, & par conſéquent $\pi\mu = pm$, on aura par la conſtruction de M. Euler & par la nôtre, $PM'' = \frac{\pi\mu + pm}{2} = pm = P'M'$ pris dans un ſens contraire. Donc, dira-t-on, après le tems $t = AB$, la corde eſt dans le même état qu'au commencement du mouvement; donc elle doit recommencer à ſe mouvoir ſuivant la même loi qu'auparavant; & on aura en général le

mouvement de la corde, en ſuivant la conſtruction de M. Euler & la nôtre, pourvû que les trois courbes ACB, $A\gamma b$, Bca, ſoient liées par une même loi; ſans s'embarraſſer ſi les autres le ſont.

§. XVI. La réponſe à cette difficulté eſt bien ſimple; c'eſt que ſi les trois courbes ſont liées par une même loi, toutes les autres à l'infini le ſeront par cette même loi. En effet, que faut-il pour que les trois courbes ſoient liées par une même loi? Il faut; 1°. ſuppoſant l'origine des x en A, que la valeur de y en x n'ait que des puiſſances impaires; ce qui rend les courbes ACB, $A\gamma b$, ſemblables & de poſition contraire; 2°. faiſant $x - a = z$, & mettant par conſéquent l'origine des z en B, il faut que la valeur de y en z n'ait auſſi que des puiſſances impaires, afin que les courbes BCA, Bca ſoient ſemblables & de poſition contraire. Or, puiſque la valeur de y en x ne contient que des puiſſances impaires, & que la valeur de y en x, en faiſant $x - a = z$, ne contient auſſi que des puiſſances impaires, il s'enſuit que dans la ſubſtitution de $z + a$ à la place de x dans l'équation, tous les termes où z eſt paire diſparoîtront. Or dans tous ces termes, a eſt élevé à une puiſſance impaire, puiſqu'il n'y a que des puiſſances impaires de x; donc ces termes diſparoîtroient de même, en ſubſtituant $z - a$ à la place de x; ou, ce qui revient au même, en faiſant $x + a = z$, & en tranſportant l'origine des z au point b. Donc l'équation de la courbe étant priſe du point b, la valeur de y n'aura que des puiſſances im-

paires. Donc la continuation de la courbe $A\gamma b$ sera liée par une même loi avec cette courbe, & par conséquent aussi avec ACB. On prouvera de même, en prenant l'origine des x & des y, non plus au point A, mais au point B, que la continuation de la courbe $Bc\alpha$ au-delà de α sera liée par une même loi avec les courbes $Bc\alpha$, ACB. Donc &c.

On peut remarquer en passant, que si les courbes AMB, Amb sont égales, semblables & liées par une même équation, & que la courbe AMB soit composée de deux parties égales & semblables, la courbe AMB aura encore, comme dans le cas précédent, des branches alternatives & égales à l'infini. Car la valeur de y en x est alors toute formée de puissances impaires; & si on met $\frac{AB}{2} - u$ à la place de x, elle n'aura plus que des puissances paires. Donc la même chose arrivera, si on met $\frac{AB}{2} + u$ au lieu de $\frac{AB}{2} - u$; & faisant $\frac{AB}{2} + u = z$, c'est-à-dire, mettant l'origine en B, la fonction de z qui en viendra, n'aura que des puissances impaires. Donc &c.

§. XVII. La question se réduit donc à prouver que les trois courbes ACB, $Bc\alpha$, Amb doivent être liées par une même équation; ou, ce qui revient au même, que φx doit être impaire, soit qu'on prenne l'origine des x en A ou en B. Or c'est ce que nous prouvons; 1°. par l'aveu même que M. Euler en fait en ter-

mes formels, & qui a été rapporté ci-deſſus, §. VI. 2°. par cette conſidération, que quand $x = o$ ou $= AB$, $\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}$ doit être $= o$ quel que ſoit t, parce que $\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}$ eſt toujours égale à zero, quand $x = o$ ou $= AB$; or, pour que $\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}$ ſoit toujours $= o$ quand $x = o$ ou $= AB$, il faut néceſſairement que $\varphi(x+t)$ & $\varphi(x-t)$ ſoient des fonctions impaires, ſoit que l'on prenne l'origine des x en A ou en B. M. Euler objectera peut-être en abandonnant ſa premiere aſſertion, qu'il n'eſt pas néceſſaire que φx ſoit impaire, pour que $\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}$ ſoit $= o$, qu'il ſuffit que $\varphi(x+t)$ & $\varphi(x-t)$ ne conſervent pas toujours la même forme. A cela je répondrai d'abord qu'il a lui-même tacitement ſuppoſé cette identité de forme dans la démonſtration qu'il a donnée de la conformité de ſa conſtruction avec l'équation $\frac{d\,d\,y}{d\,x^2} = \frac{d\,d\,y}{d\,t^2}$, comme je l'ai démontré plus haut, & qu'ainſi il faut, ou qu'il abandonne ſa démonſtration, ou qu'il convienne de l'identité de forme des quantités $\varphi(x+t)$ & $\varphi(x-t)$. J'ajoute qu'il eſt contre toutes les régles de l'analyſe, de faire ainſi changer de forme, ſuivant le beſoin qu'on croit en avoir, à l'intégrale d'une équation différentielle; en effet, ſi l'intégrale $y = \varphi(x+t) + \varphi(x-t)$ de l'équation $\frac{d\,d\,y}{d\,x^2} = \frac{d\,d\,y}{d\,t^2}$ ne conſervoit

servoit pas une forme constante, ne pourroit-on pas dire aussi, par exemple, que l'intégrale de l'équation différentielle $ds = \frac{dx}{\sqrt{2x - xx}}$ entre les arcs s d'un cercle & les abscisses x correspondantes, peut être supposée de forme variable, suivant la grandeur des arcs s qui répondent à une même abscisse; ce qui renverseroit la démonstration généralement admise de l'impossibilité de la quadrature indéfinie du cercle?

§. XVIII. Mais pour attaquer l'assertion de M. Euler par une preuve plus directe, j'ajoute que la solution du Problême portera absolument à faux, si on se permet de faire changer de forme à $\varphi(x+t)$ & à $\varphi(x-t)$. Pour le faire voir, considérons de quelle maniere l'équation $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{ddy}{dt^2}$ conduit à l'équation $y = \varphi(x+t) + \Psi(x-t)$. Nous avons donné au commencement de ce Mémoire une méthode fort simple pour cela; & cette méthode qui s'accorde avec celle des Mémoires de Berlin de 1747, se réduit à prouver qu'en supposant $\frac{dy}{dx} = q$, & $\frac{dy}{dt} = p$, les différentielles $p\,dt + q\,dx$ d'une part, & $p\,dx + q\,dt$ de l'autre, seront des différentielles complettes; d'où il est aisé de conclure que $y = \varphi(x+t) + \Psi(x-t)$. Or comment conçoit-on que $p\,dx + q\,dt$, & $p\,dt + q\,dx$ représentent des différentielles complettes, si les fonctions de x & de t dont ces quantités sont les différences, sont des fonctions

qui changent de forme? M. Euler dira peut-être (car je veux prévenir toutes les objections, même celles qu'il ne penſeroit peut-être pas à me faire) que ſi on fait $x+t=u$, & $x-t=r$, on aura $p\,dx+q\,dt=du\,\Delta u+dr\,\Gamma r$ & $p\,dt+q\,dx=du\,\Delta u-dr\,\Gamma r$, qui ſont toutes les deux, dira-t-il, des différentielles complettes, parce qu'on peut les repréſenter par la quadrature de deux courbes tracées à volonté, dont les abſciſſes ſont u & r, & les ordonnées Δu & Γr, ſans qu'il ſoit néceſſaire que Δu, ni Γr expriment des fonctions toujours de même forme. A cela voici ma réponſe. 1°. Il s'enſuivroit de ce raiſonnement que l'équation $\frac{d\,dy}{dx^2}=\frac{d\,dy}{dt^2}$ auroit toujours lieu, en ſuppoſant $y=\varphi(x+t)+\Psi(x-t)$, & en faiſant changer de forme à volonté aux fonctions $\varphi(x+t)$ & $\Psi(x-t)$; au lieu que nous avons démontré invinciblement ci-deſſus, qu'il y a une infinité de cas où l'équation $\frac{d\,dy}{dx^2}=\frac{d\,dy}{dt^2}$ n'aura point lieu, ſi on ſe donne la liberté de faire changer de forme à ces fonctions. Pour rendre cette remarque encore plus palpable, je ſuppoſe que l'on ait à rendre $p\,dx-p\,dt$ une différentielle complette, on trouvera que l'intégrale eſt $\Pi(x-t)$. Mais s'enſuivra-t-il de-là qu'on pourra faire changer de forme à volonté à la fonction $\Pi(x-t)$, parce que faiſant $x-t=r$, Πr repréſentera l'ordonnée d'une courbe tracée à volonté, dont l'abſciſſe ſera r? Nullement. En effet, ſuppoſons cette courbe arbitraire tracée de maniere, qu'au point

où $x = b$, ſes deux portions faſſent un angle fini ; faiſons $x - t = b$, on trouvera facilement que la différence de Πr, en faiſant varier x, c'eſt-à-dire, en ſuppoſant $x - t = b + dx$, eſt très-différente de la différence de Πr, en faiſant varier t, c'eſt-à-dire, en ſuppoſant $x - t = b - dt$; donc la ſolution ſeroit fautive, puiſque la différence de $\Pi (x - t)$ ne ſeroit pas $p\,dx - p\,dt$; ce qui eſt contre l'hypothèſe. 2°. Si la valeur de y change de forme, j'avoue que je ne puis me faire une idée nette de ce que c'eſt que les quantités $\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}$ & $\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}$, dans leſquelles on ſuppoſe que la différence de y eſt priſe deux fois de ſuite en ne faiſant varier que x, ou en ne faiſant varier que t. Par exemple, lorſque y paſſe d'une forme à une autre, & que par conſéquent la valeur de y renferme une nouvelle fonction de x & de t, ajoutée à la précédente, qu'eſt-ce alors que $\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}$; & quelle idée diſtincte peut-on s'en former ? 3°. Si dans l'équation $\frac{d\,p}{d\,t} = \frac{d\,q}{d\,x}$ on ſuppoſe que p & q puiſſent changer de forme, le Problême demeurera indéterminé. Ceci a beſoin d'une plus grande explication.

§. XIX. Soit tracée à volonté & ſans aucune régle, une courbe $B\,M$ (*Fig.* 10.) dans laquelle l'ordonnée y ſoit une fonction de AP, x, & d'un parametre t ; fonction qu'on ſuppoſe ici ne pas conſerver toujours la même

forme ; ſoit enſuite imaginée la courbe $b\ m$ infiniment proche de celle-là, & tracée auſſi à volonté. Quelle que ſoit la fonction (variable ou non variable) de x & t, qui repréſente $P\ M$, il eſt certain qu'on peut ſuppoſer $Q\ \mu = p\ dx$, $q\ \mu' = p'\ dx$, $M\ m = q\ dt$, & $\mu\ \mu' = q'\ dt$, ſans qu'il ſoit néceſſaire que $p\ dx + q\ dt$ ſoit une différentielle exacte, ni que les quantités q & q', p & p' ſoient de la même forme. Il eſt de plus évident qu'on aura en général $q\ \mu' - Q\ \mu = \mu\ \mu' - M\ m$; d'où l'on conclura (à la maniere de M. Euler) que $\frac{p' - p}{dt} = \frac{q' - q}{dx}$; ou $\frac{dp}{dt} = \frac{dq}{dx}$, en ne faiſant varier dans le premier membre que t, & dans le ſecond que x ; & en ſuppoſant d'ailleurs, ſi on le juge à propos, que les quantités p & q ſoient de forme variable. Donc ; quand on conclud de l'équation $\frac{dq}{dx} = \frac{dp}{dt}$, que $p\ dx + q\ dt$ eſt une différentielle complette (comme on le conclud dans la ſolution du Problême des cordes vibrantes) cette concluſion renferme implicitement & néceſſairement celle-ci, que p & q ne changent point de forme. Donc ſi on ſe permet de faire changer de forme à ces fonctions, on ne pourra plus regarder $p\ dt + q\ dx$ comme une différentielle complette, & le Problême ne pourra plus être réſolu, & *reſtera tout-à-fait indéterminé.*

§. XX. La conſtruction de M. Euler ne ſatisfait donc qu'en apparence à la ſolution du Problême ; tout

ce que nous avons dit le démontre assez; ajoutons, pour derniere réfléxion, qu'il n'est permis de placer alternativement au-dessus & au-dessous de l'axe AB, les courbes ACB, Amb &c. (*Fig. 9.*) qu'autant que ces courbes tiennent à une même équation. Autrement, de quel droit regardera-t-on pm comme négative par rapport à PM, puisque ce n'est pas la valeur analytique de pm qui oblige de la prendre au-dessous de l'axe, mais une construction arbitraire, uniquement imaginée pour satisfaire à cette condition, que les points A & B soient toujours en repos ?

§. XXI. Au reste je ne suis point du tout dans le sentiment que M. Euler m'attribue, que *le mouvement de la corde ne sauroit être déterminé, à moins que sa figure ne soit comprise dans l'équation* $y = \alpha \text{ sin. } \frac{\pi x}{a} + \beta \text{ sin. } \frac{2\pi x}{a} + \gamma \text{ sin. } \frac{3\pi x}{a}$ &c. J'ai seulement prétendu que la solution n'est possible que dans le cas où les courbes semblables & égales AMB, $B\mu a$, Amb &c. & ainsi à l'infini, sont assujetties à la loi de continuité; ce qui peut arriver d'une infinité de manieres, sans qu'elles soient assujetties à l'équation particuliere $y = \alpha \text{ sin. } \frac{\pi x}{a} + \beta \text{ sin. } \frac{2\pi x}{a} + \gamma \text{ sin. } \frac{3\pi x}{a}$ + &c. dont je n'ai pas même parlé. Il est aisé de voir par les articles IX. & XXVI. de mon Mémoire imprimé parmi ceux de Berlin de 1747, que par le moyen

des courbes géométriques ou méchaniques qui rentrent en elles-mêmes, on peut trouver une infinité de figures différentes de la corde, qui toutes rendront la ſolution poſſible. Il reſteroit à M. Euler à faire voir que toutes ces figures ſeroient compriſes dans l'équation $y = \alpha \text{ ſin.} \frac{\pi x}{a} + \beta \text{ ſin.} \frac{2\pi x}{a} + \gamma \text{ ſin.} \frac{3\pi x}{a} +$ &c. Or c'eſt ce qui me paroît impoſſible ; & en cas que M. Euler voulût en diſconvenir, ce que je ne crois pas, il en trouvera plus bas la preuve dans un des articles de ma réponſe à M. Bernoulli.

§. XXII. Mais, dira ſans doute M. Euler, quelle doit donc être en général la loi du mouvement de la corde, lorſqu'elle aura au commencement une figure quelconque ? Je réponds, comme je l'ai déja fait ailleurs, que dans pluſieurs cas le Problême ne pourra être reſolu, & ſurpaſſera les forces de l'analyſe connue. Je ne ſai même ſi l'on peut trouver dans tous les cas, d'une maniere approchée, le mouvement de la corde, en la ſuppoſant diviſée en un grand nombre de particules égales, & en cherchant ſéparément le mouvement de chaque particule, ſuivant les méthodes que j'ai données ailleurs pour cela.

J'ai déja remarqué dans les Mémoires de Berlin de 1750, pag. 359, que ſi on regardoit la corde comme un fil élaſtique ſans maſſe, chargé d'un poids à ſon milieu, le tems des vibrations ſeroit bien différent de celui

que la théorie donne dans d'autres hypotheſes plus conformes à la nature. Si on ſuppoſe la corde chargée de deux poids P, qui la diviſent en trois parties égales, & ces poids tellement diſpoſés qu'ils arrivent en même-tems dans la ligne droite qui joint les deux extrémités de la corde, on trouvera, en nommant l la longueur de la corde exprimée en pieds, & φ la force de tenſion de cette même corde, que le tems d'une vibration eſt $\frac{1 \text{ ſec. } \pi \sqrt{l} . \sqrt{P} \sqrt{2}}{2\sqrt{15} . \sqrt{3} . \sqrt{\varphi}}$; (voyez les Mémoires de Berlin 1750, pag. 359.). Le tems ſera d'autant plus petit, que les deux poids ſeront plus près des extrémités de la corde; enſorte que ſi la diſtance d'un des poids à l'extrémité la plus voiſine eſt $\frac{l}{n}$, le tems ſera diminué en raiſon de $\sqrt{3}$ à $\sqrt{n}$. Il eſt vrai que ces différentes ſuppoſitions repréſentent peu exactement le véritable état de la corde; il faudroit ſuppoſer un beaucoup plus grand nombre de poids, tous égaux, & placés à la même diſtance les uns des autres. Mais je ne ſais encore une fois, ſi dans ce cas le réſultat du calcul repréſenteroit toujours le mouvement approché de la corde. Il ſuffit, pour être réſervé dans cette aſſertion, de ſe rappeller qu'un arc, même infiniment petit, de courbure finie, ne doit pas toujours être confondu avec ſa corde, ſur-tout lorſque cette courbure influe dans la valeur des forces accélératrices, comme elle y influe ici. C'eſt par cette raiſon que la chûte par un arc de cercle infiniment petit, n'eſt

pas la même que par la corde de cet arc. Or il pourroit en être ainſi, & par la même raiſon, des cordes vibrantes; & c'en eſt aſſez pour nous faire douter ſi on peut regarder légitimement la courbe vibrante, au moins dans tous les cas, comme un polygone d'un très-grand nombre de côtés. Au reſte, ſuppoſé que cette hypotheſe fût légitime, on pourroit en tirer une nouvelle preuve contre la ſolution de M. Euler; car s'il étoit vrai, comme il réſulte de ſa ſolution, que les points de la courbe vibrante arrivaſſent toujours en même-tems à la ſituation rectiligne, quand cette courbe eſt compoſée de deux parties quelconques égales & ſemblables, il s'enſuivroit que tous les points du polygone vibrant circonſcrit à cette courbe arriveroient auſſi ſenſiblement en même-tems à la ligne droite, ce qui n'eſt pas.

§. XXIII. On objectera peut-être, qu'il eſt impoſſible d'expliquer dans ma théorie, pourquoi la corde frappée d'une maniere quelconque, rend toujours à peu près le même ſon; puiſque ſes vibrations, ſelon moi, peuvent être très-irrégulieres en pluſieurs cas. J'en conviens; mais je ſuis perſuadé que la ſolution de cette queſtion n'appartient point à l'Analyſe: elle a fait tout ce qu'on étoit en droit d'attendre d'elle; c'eſt à la Phyſique à ſe charger du reſte.

D'ailleurs il y a une infinité de cas, même dans l'hypotheſe & la ſolution de M. Euler, où les points de la corde n'arriveront pas en même-tems à la ſituation *AB*; & il ſera tout auſſi difficile d'expliquer dans ces cas-

cas-là comment la corde rend toujours le même ſon que dans les autres. Je pourrois ajouter, que ſuivant la ſolution même de M. Euler, les vibrations de la corde devroient durer continuellement; au lieu que l'expérience nous prouve qu'elles ceſſent bientôt: d'où il s'enſuit néceſſairement que dans tous les cas le mouvement réel de la corde donné par l'expérience eſt très-différent de celui qu'on trouve par le calcul.

La maniere ordinaire, pour ne pas dire l'unique, de faire ſortir une corde de ſon état de repos, c'eſt de la prendre par un de ſes points & de la tendre en la tirant, ce qui lui donne la figure de deux lignes droites qui font un angle entr'elles. Or M. Euler croit-il que dans ce cas ſa conſtruction puiſſe être admiſe, & donne le vrai mouvement de la corde? Je doute qu'il ait cette prétention, d'autant que l'équation $\frac{d\,d\,y}{d\,t^2} = \frac{d\,d\,y}{d\,x^2}$ n'aura pas lieu dans ce cas-là, & que d'ailleurs les tems des vibrations des parties de la corde ſeront différens, ſelon le point par lequel elle ſera tirée; ce qui eſt contraire à l'expérience, qui nous prouve que la corde rend toujours le même ſon dans tous les cas.

Ce qu'on peut dire, ce me ſemble, de plus vraiſemblable pour concilier l'expérience avec la théorie, c'eſt que la réſiſtance de l'air & le frottement des parties de la corde étant les deux cauſes principales qui en font ceſſer les vibrations, & qui par conſéquent font arriver à la fois tous les points dans l'état de repos, ces deux

causes dont l'action s'exerce suivant une loi qui ne nous est pas connue, obligent la corde à prendre en assez peu de tems la figure nécessaire pour que tous ses points arrivent en même tems à la situation rectiligne, figure qui peut être différente de la Trochoïde de M. Taylor, & même d'une Trochoïde composée, comme j'espere le prouver dans un moment.

Si l'on regardoit comme une force constante la résistance qui s'oppose au mouvement de la corde, ce qui vraisemblablement n'est pas fort éloigné d'être vrai, on auroit $\frac{d\,d\,y}{d\,x^2} + A = \frac{d\,d\,y}{d\,t^2}$ & $y = \varphi(x+t) + \Psi(x-t) + B\,x\,x + C\,t\,t$, B & C désignant des constantes convenables. Mais cette équation même ne pourroit représenter le vrai mouvement de la corde conformément à l'expérience, que dans le cas où tous les points arriveroient en même-tems à la situation rectiligne, avec une viteſſe $= o$. Or c'est ce qui ne pourroit avoir lieu tout au plus que dans certains cas particuliers de cette équation générale.

§. XXIV. Je viens présentement aux objections de M. Daniel Bernoulli. Il me semble que M. Euler y a parfaitement satisfait; j'ajouterai seulement les observations suivantes, qui ne serviront qu'à confirmer les siennes.

1°. Il me paroît impossible de prouver, comme le prétend M. Bernoulli, que toutes les courbes de la corde vibrante puissent être renfermées dans l'équation

$y = \alpha \sin. \frac{\pi x}{a} + \beta \sin. \frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin. \frac{3\pi x}{a}$ &c.

en supposant même que cette courbe de la corde vibrante soit méchanique, & composée de parties égales & semblables, situées alternativement au-dessus & au-dessous de l'axe, & liées par la loi de continuité. Je n'objecte point à M. Bernoulli des courbes algébriques, comme a fait M. Euler, art. IX. de son Mémoire; parceque ces courbes, comme je l'ai prouvé, ne peuvent représenter la courbe initiale, dans le cas où la solution analytique du Problême est possible. Mais il y a une infinité d'autres cas dans lesquels la solution analytique est possible, quoique la courbe ne puisse être représentée par l'équation rapportée ci-dessus. En effet, supposons, par exemple, une courbe ovale & rentrante en elle-même $A m D B E$ (*fig.* 11.) dont les deux parties $A D B$, $A E B$ soient différentes si l'on veut, mais dans laquelle la partie $D B$ soit égale & semblable à la partie $A D$, & la partie $B E$ à la partie $E A$; soit pris $P M =$ à n fois l'arc $A m$, ou le segment $A P m$, ou tous les deux ensemble (n étant un nombre très-grand, & $A C$ une très-petite ligne par rapport à $A O$); on aura (art. XXIV. de mon Mémoire de 1747) une courbe transcendante $L A O R r$, du nombre de celles qui rendent la solution du Problême possible, lorsqu'on suppose que la corde a au commencement du mouvement la figure $L A O R r$; car la partie $O R r$ sera égale & semblable à la partie $L A O$, & semblablement située au-

deſſous de l'axe CO, & ainſi à l'infini; & de plus ſi les parties AO, AL ſont égales & ſemblables, c'eſt-à-dire, ſi la courbe $ADBE$ eſt coupée en deux parties égales & ſemblables par l'axe AB, les points de la courbe arriveront au même inſtant dans la ſituation rectiligne. Donc pour que l'équation $y = \alpha \text{ ſin.} \frac{\pi x}{a} + \beta \text{ ſin.} \frac{2\pi x}{a}$ + &c. repréſentât en général cette courbe, il faudroit qu'en nommant CP, y; & l'arc Dm ou l'eſpace $CDmP$, u; l'équation entre y & u fût en général $y = A \text{ ſin.} au + B \text{ ſin.} bu + C \text{ ſin.} cu +$ &c. à l'infini, $ADBE$ étant une courbe ovale quelconque, telle que $AD = DB$ & $BE = AE$. Or je ne crains point d'avancer que cela eſt impoſſible; & quand même il y auroit des courbes dont on pourroit réduire l'équation à cette forme par le moyen des ſeries, M. Bernoulli ſait auſſi-bien que moi combien la méthode de repréſenter l'équation d'une courbe par une ſerie, peut être ſouvent fautive ou peu exacte, ſoit par la divergence des ſeries, ſoit par leur peu de convergence.

2°. Si on décrit une courbe quelconque $AVCB$, telle qu'elle coupe ſon axe en A & en C, & que les deux parties AVC, CB, ſoient égales, ſemblables & de ſituation contraire, & qu'on faſſe $PM = m.PV + n$ fois l'arc $Am + k$ fois le ſegment APm, on aura une courbe $AMRr$ &c. beaucoup plus générale que la précédente, & qui ſatisfera encore au Problême. Or je demande comment cette courbe pourra être repréſentée

par l'équation $y = \alpha \text{ sin.} \frac{\pi x}{a} + \beta \text{ sin.} \frac{2 \pi x}{a} + \&c$?

Par exemple, si on fait $PM = z$, & que l'on ait les équations $z = m(b^2 y - y^3) + n u$ (b étant $= AC$); & $B - x = m.(b^2 y - y^3) + n D - n A$ sin. y (B étant $= CO$, $D = AD$, & A sin. y marquant l'angle dont le sinus est y) je demande comment on tirera de-là l'équation en y ci-dessus?

3°. La source des mépriſes de M. Bernoulli en cette matiere, vient, si je ne me trompe, de ce qu'il a trop légérement conclu du fini à l'infini. Je m'explique. Lorſqu'une corde vibrante est chargée d'un nombre fini de poids, il est inconteſtable qu'on peut regarder les vibrations de chaque poids, comme compoſées d'autant de vibrations ſynchrones qu'il y a de poids; le calcul le démontre, *quelle que ſoit la figure initiale de la corde*. Mais s'enſuit-il de-là, que lorſque le nombre des poids est infini, on puiſſe regarder toujours le mouvement de la corde comme compoſé de pluſieurs vibrations Tayloriennes? Non certainement. En effet il faudroit, pour que cette concluſion fût juſte, qu'on pût toujours regarder la figure initiale comme un mêlange de Trochoïdes, *quelle que fût cette figure initiale*; or c'est ce qui n'est pas. Car ſoit en général $y = \alpha$ sin. $\pi x + \zeta$ sin. $\mu x + \gamma$ sin. νx &c. l'équation prétendue de la corde; on auroit donc lorſque $x = o$, $d\,dy = o$; c'est-à-dire que la courbure de la corde ſeroit nulle à l'origine; donc l'équation dont il s'agit, ne peut repréſenter la corde

toutes les fois que la courbure ſera finie ou infinie à l'origine ; & j'ai prouvé ci-deſſus que dans une infinité d'autres cas, où la courbure eſt même nulle à l'origine, l'équation dont il s'agit ne repréſenteroit pas d'une maniere plus exacte la figure initiale. Pour le faire ſentir par un exemple très-ſimple, je ſuppoſe, ce qui eſt le cas le plus ordinaire, que la corde ait au commencement la figure d'un triangle iſoſcele ; il eſt certain que la courbure ſera nulle aux extrémités, & il ne l'eſt pas moins que la figure de la corde ne peut être repréſentée par l'équation $y = \alpha \text{ ſin. } \pi x + \zeta \text{ ſin. } \pi x + \gamma \text{ ſin. } \pi x$ &c. puiſque cette équation appartient évidemment à une courbe dont la courbure eſt continue, au lieu que dans le cas préſent la courbure de la corde varie bruſquement au point milieu, où les deux parties font un angle. M. Bernoulli ne me répondra pas ſans doute que dans ce cas, ſuivant mes principes, on ne peut trouver analytiquement le mouvement de la corde ; cette réponſe ne ſeroit pas valable (dans ſon hypotheſe) ; puiſque, comme je l'ai remarqué, ſa ſolution, ſi elle eſt bonne en général, doit donner l'équation $y = \alpha \text{ ſin. } \pi x + \zeta \text{ ſin. } \mu x + \gamma \text{ ſin. } \pi x$ &c. pour toutes les courbes imaginables.

4°. Ce grand Géometre a bien ſenti, comme il paroît par le Journal des Savans de Mars 1758, la difficulté qu'on pouvoit lui faire ſur la concluſion qu'il tire du nombre fini des corps au nombre infini ; il ſe contente de répondre, que ſi cette difficulté eſt fondée, la conſtruction de M. Euler ne doit pas avoir lieu non plus pour

tous les cas poſſibles, parce qu'elle ne peut, à la rigueur, s'appliquer aux cas où la courbure n'eſt pas nulle aux extrémités. Mais après tout ce que j'ai dit ci-deſſus, on ſent aſſez que cette difficulté ne touche qu'à la ſolution de M. Euler, & non pas à la mienne. Pour que la ſolution de M. Bernoulli rendît la mienne inutile, il faudroit qu'il prouvât; 1°. que toute courbe compoſée à l'infini de parties égales & ſemblables, alternativement ſituées au-deſſus & au-deſſous de l'axe, peut être repréſentée par l'équation $y = \alpha \text{ ſin. } \pi x + \zeta \text{ ſin. } \mu x + \gamma \text{ ſin. } \nu x$ &c. π, μ, ν, étant des nombres commenſurables entr'eux; équation dans laquelle y ſera $= o$, lorſque $x = o$, & lorſque $\pi x, \mu x, \nu x$ &c. ſont des multiples quelconques de la demi-circonférence. Or c'eſt ce qui ne me paroît pas facile à prouver; car quand on employeroit pour faire coincider les deux courbes, tant de coëfficiens indéterminés qu'on voudroit, on ſait combien cette méthode de faire coincider une courbe cherchée avec une courbe de genre donné, eſt ſouvent fautive. D'ailleurs elle ne feroit tout au plus qu'une approximation, & il s'agit ici d'une ſolution géométrique, exacte & rigoureuſe. 2°. Il faudroit de plus qu'il démontrât que le Problême des cordes vibrantes ne peut être réſolu que dans le cas où la figure initiale eſt compoſée à l'infini de parties alternatives, égales & ſemblables. Or c'eſt ce qui ne paroît pas réſulter de ſa ſolution, ſuivant laquelle au contraire il paroît qu'il regarde, & qu'il doit regarder toute figure initiale quelconque donnée à la corde,

comme un mêlange de Trochoïdes Tayloriennes.

Ainſi, quand même M. Daniel Bernoulli parviendroit à prouver démonſtrativement (ce qu'il ne fera jamais) que toutes les courbes, qui rendent la ſolution poſſible, ſont renfermées dans l'équation $y = \alpha$ ſin. $\frac{\pi x}{a} + \zeta$ ſin. $\frac{2\pi x}{a}$ + &c. ou plus généralement, s'il le veut, $y = \alpha$ ſin. $\pi x + \zeta$ ſin. $\mu x + \gamma$ ſin. νx &c. il ne pourroit, ce me ſemble, y parvenir, qu'en trouvant d'abord, comme je l'ai fait, la maniere générale dont la courbe vibrante peut ſe conſtruire par le moyen d'une courbe ovale quelconque, & en prouvant enſuite que les abſciſſes CP de cette courbe ovale ont, ſoit avec les arcs correſpondans, ſoit avec les aires correſpondantes, le rapport indiqué par l'équation $y = \alpha$ ſin. $\frac{\pi x}{a} + \zeta$ ſin. $\frac{2\pi x}{a}$ + &c.; car je viens de prouver qu'on ne peut déduire cette équation de la conſidération du mouvement d'une c de chargée d'un nombre fini de poids. Donc, quand M. Bernoulli ſeroit auſſi fondé dans ſes aſſertions, qu'il me le paroît peu, il me ſemble que pour juſtifier ces aſſertions, la ſolution que j'ai donnée ſeroit néceſſaire, & ne ſeroit point bornée à l'avantage ſingulier que M. Bernoulli lui accorde, de conduire par un chemin très-pénible à un objet fort facile à atteindre. Je crois au reſte que le mérite de ma ſolution, ſi elle en a quelqu'un, ne conſiſte point dans la difficulté & dans la complication du calcul, comme M. Bernoulli le prétend; il eſt

aiſé

sile à tous ceux qui sont au fait de ces matieres, de voir que mon calcul en lui-même est très-facile, & se réduit aux opérations les plus simples & les plus courtes; c'est dans la maniere dont j'applique le calcul à cette question, & dont je résous les difficultés qu'elle présente, que consiste la nouveauté, & peut-être, si j'ose le dire, l'élégance de ma méthode.

§. XXV. Je crois avoir suffisamment prouvé contre M. Taylor, Article XLII. de mon Mémoire de 1747, qu'il n'a nullement démontré que la corde vibrante doive prendre la figure de la Trochoïde allongée. M. Daniel Bernoulli répéte la même chose après lui au n°. XV. de son Mémoire, mais sans en apporter la moindre preuve *géométrique* différente de celle que j'ai déja combattue; il a recours à l'expérience & à la résistance de l'air (dont on fait abstraction ici) pour prouver que toutes les Trochoïdes particulieres se réduiront à une seule; en quoi il differe beaucoup de M. Taylor, qui prétend prouver *géométriquement* & abstraction faite de toutes causes étrangeres, que la courbe prendra enfin la forme d'une seule & unique Trochoïde; ce qui est bien contraire à la théorie de M. Daniel Bernoulli, & ce qui pourroit servir à confirmer, si cela étoit nécessaire, mes objections contre la prétendue démonstration de M. Taylor.

§. XXVI. J'ai démontré dans les Mém. de Berlin de 1747, & dans ceux de 1750, que le tems des vibrations d'une corde de longueur donnée l, étoit toujours

le même, quelque figure que prît la corde. M. Bernoulli m'objecte, art. XVI. (c'eſt du moins ce que j'en ai compris) que le tems de la vibration ſera la moitié moindre que je ne l'ai aſſigné, ſi la corde a un point fixe ou nœud immobile en ſon milieu. C'eſt de quoi je conviens avec lui; mais alors la corde ne doit plus être cenſée ſimple, comme je le ſuppoſois dans mon Mémoire; c'eſt proprement un compoſé de deux cordes qui font leurs vibrations ſéparément & indépendamment l'une de l'autre; & c'eſt pour cette raiſon que j'ai regardé la corde comme étant ſans nœuds ou points fixes; il eſt vrai que je ne l'ai pas dit expreſſément, mais tout mon Mémoire & mes figures même en font foi, pour qui voudra y faire quelqu'attention; & je ne puis croire que M. Bernoulli veuille incidenter là-deſſus. Il y a plus, & je dis que ma théorie s'applique d'elle-même aux courbes qui ont des nœuds; par exemple, ſi la corde vibrante a un nœud en ſon point de milieu, il ſuit de la formule $y = \varphi(z+x) - \varphi(z-x)$, & de l'Art. XX. de mon Mém. de 1747, que le tems d'une vibration ſera $\frac{\theta l}{2\sqrt{2aml}}$; car alors prenant $z = \frac{1}{2}l$ (& non l comme dans cet Art. XX, où l'on ſuppoſe la courbe ſans nœuds) les ordonnées de la courbe génératrice ſeront égales & de même ſigne des deux côtés; ainſi l'objection de M. Bernoulli, s'il m'eſt permis de le dire, porte abſolument à faux, de quelque côté qu'on l'enviſage. Au reſte, quand j'ai dit que tous les points de la corde retour-

noient à leur ſituation primitive dans le même tems, quelle que fût la figure de la corde, je n'ai pas prétendu que dans ce tems chaque point de la corde ne fît que des vibrations ſimples; la ſeconde de ces deux propoſitions n'eſt point la ſuite de la premiere; il me ſuffiſoit, pour l'objet que je me propoſois, de trouver le lieu de chaque point pour chaque inſtant, ſans entrer dans un plus grand détail; détail d'autant plus inutile, que j'eſpere montrer à la fin de ce Mémoire, qu'il ne ſert abſolument de rien pour expliquer les phénomenes du ſon. Je n'ai parlé en aucun endroit de mon Mémoire de cet *iſochroniſme de vibrations* que M. Bernoulli me reproche; j'ai parlé ſeulement, Art. XX & XXV de mon Mémoire de 1747, du cas où tous les points de la corde *ſont à la fois en ligne droite*, ou, ce qui eſt la même choſe, arrivent à l'axe dans le même inſtant. Il eſt vrai que dans mon Mémoire de 1750, je me ſuis ſervi de cette expreſſion, que *le tems d'une vibration* eſt toujours le même, quelle que ſoit la figure de la corde; mais il eſt évident par l'Art. XX de mon Mémoire de 1747, qui eſt relatif à l'endroit cité de mon Mémoire de 1750, que j'entends ici par *le tems d'une vibration*, le tems que la corde employe à ſe mettre en ligne droite, lorſque cela eſt poſſible; ou, ce qui revient au même, le tems qui eſt néceſſaire pour que tous les points ceſſent de vibrer à la fois, & qu'on peut appeller légitimement le *tems d'une vibration* de la corde, ſans prétendre pour cela que les vibrations particulieres ſoient iſochrones. Si

M. Euler a employé un autre langage, c'eſt ce que je n'examine pas; mais je doute qu'il ait eu en vûe le ſens que M. Bernoulli lui prête.

§. XXVII. M. Bernoulli dit, au commencement de ſon ſecond Mémoire, qu'il ne ſe ſouvient pas d'avoir vû de ſolution générale du Problême qui conſiſte à trouver la loi des oſcillations de deux corps attachés à une corde tendue. Je crois avoir donné cette ſolution dans l'Art. XLIV. de mon Mémoire de 1747. Je l'ai réduite à deux équations différentielles, aiſément intégrables par différentes méthodes fort ſimples, que j'ai expliquées, ſoit dans les Mémoires de l'Acad. de Berlin de 1748, ſoit dans ceux de 1750. La ſimplification que M. Bernoulli apporte à la ſolution de ce Problême, quand elle ſeroit réelle, ce dont je ne conviens pas, ne devroit, ce me ſemble, me rien faire perdre de l'avantage de l'avoir réſolu le premier. Les valeurs de x & de y étant connues, on trouvera, en faiſant $\frac{dy}{dt} = o$. & $\frac{dx}{dt} = o$, ce que M. Bernoulli appelle les vibrations particulieres de chaque corps, les points où ces vibrations finiſſent, & le tems employé à les faire. Je ne refuſe point de ſuivre en cela ſon langage, pourvû qu'il m'accorde en même-tems que ma méthode donnera très-exactement le mouvement de chaque corps; & c'étoit-là tout ce que je me propoſois.

Pour donner ici un eſſai de cette méthode, & pour

mettre le Lecteur à portée de la comparer avec celle de M. Bernoulli, & de juger laquelle eſt la plus ſimple; je ſuppoſe une corde chargée de deux poids, qui la diviſent en trois parties égales, que l'on fera chacune $= 1$; que y, y' ſoient les diſtances des poids à la ligne AB (*fig.* 1.); on aura en nommant φ la tenſion de la corde, M la maſſe de chacun des poids, & ſuppoſant, comme dans les Mémoires de 1747, $\frac{2\alpha\varphi}{Mp} = \theta^2$, ce qui ſe peut toujours; $-ddy = (2y - y')\frac{\varphi dt^2 \cdot 2\alpha}{Mp\,\theta^2} = (2y - y')dt^2$; & $-ddy' = (2y' - y)\,dt^2$; donc $y' = 2y + \frac{ddy}{dt^2}$; donc $d^4y + 4ddy\,dt^2 + 3y\,dt^4 = 0$; donc ſi on prend les quatre racines de l'équation $f^4 + 4ff + 3 = 0$, qui ſont $f = \sqrt{3}.\sqrt{-1}$, $f = -\sqrt{3}.\sqrt{-1}$, $f = +\sqrt{-1}$, $f = -\sqrt{-1}$, on aura $y = Ac^{t\sqrt{3}.\sqrt{-1}} + Ac^{-t\sqrt{3}.\sqrt{-1}} + Bc^{t\sqrt{-1}} + Bc^{-t\sqrt{-1}}$; A & B étant deux indéterminées. On aura de même la valeur de y' par l'équation $y' = 2y + \frac{ddy}{dt^2}$; & on déterminera les conſtantes A & B par les valeurs initiales de y & de y'.

Si la corde eſt chargée de trois corps qui la diviſent en quatre parties égales, on aura $-ddy = (2y - y')dt^2$; $-ddy' = (2y' - y - y'')\,dt^2$; $-ddy'' = (2y'' - y')\,dt^2$; & l'équation à réſoudre ſera $f^6 + 5f^4 + 10ff + 4 = 0$, dont les ſix racines ſont

$f = \pm\sqrt{2}.\sqrt{-1}$; $f = \pm\sqrt{-1}.\sqrt{2 \pm \sqrt{-2}}$; & le reſte s'achevera comme dans le cas précédent. Si le polygone vibrant étoit compoſé de deux portions égales & ſemblables au commencement du mouvement, il eſt viſible qu'il le ſeroit de même pendant tout le tems du mouvement; en ce cas, le nombre des équations ſeroit la moitié mbindre; par exemple, dans le cas où il n'y auroit que deux corps, on auroit $y' = y$, & $-ddy = y\,dt^2$; dans le cas de trois corps, on auroit $-ddy = (2y - y')\,dt^2$; $-d\,dy' = (2y - 2y')\,dt^2$; & $y'' = y$; & ainſi des autres.

Mais pour mettre le Lecteur encore plus à portée de comparer la ſolution de M. Bernoulli avec la mienne, je vais réſoudre le Problême d'une maniere générale, & faire voir évidemment, quoique M. Bernoulli paroiſſe penſer le contraire, qu'il peut être réſolu par une autre méthode que la ſienne, & j'oſe le dire, d'une maniere plus directe, & du moins auſſi ſimple. Pour cela j'appellerai avec M. Bernoulli, L la longueur totale de la corde, P le poids tendant, m un des poids, n, l'autre, α la diſtance initiale du poids m à l'axe de la corde, & x ſa diſtance variable au même axe, ζ la diſtance initiale du poids n, & y ſa diſtance variable, l la diſtance du poids m au bout de la corde le plus proche, λ la diſtance du poids n à l'autre bout de la corde, enſorte que $L - \lambda - l$ ſoit la diſtance entre les deux poids; & on aura $-ddx = \frac{2aPdt^2}{pm\theta^2}\left(\frac{x}{l} + \frac{x-y}{L-\lambda-l}\right)$;

$\&c - d\,d\,y = \frac{2aP\,dt^2}{pn\theta^2}\left(\frac{y}{\lambda} + \frac{y-x}{L-\lambda-l}\right)$; équations qui reviennent au même, comme il eſt aiſé de le voir, que celles qui ont été données pour le même objet dans l'Art. XLIV. de mon Mémoire de 1747.

Pour intégrer ces équations plus commodément, je fais

$$\Delta = \frac{2aP}{mpl} + \frac{2aP}{mp(L-\lambda-l)}; \quad \Gamma = -\frac{2aP}{mp(L-\lambda-l)};$$

$$\varphi = -\frac{2aP}{np(L-l-\lambda)}; \quad \Pi = \frac{2aP}{npl} + \frac{2aP}{np(L-l-\lambda)};$$

& j'ai les deux équations $-d\,d\,x = (\Delta x + \Gamma y)\frac{dt^2}{\theta^2}$;

$\&c - d\,d\,y = (\varphi x + \Pi y)\frac{dt^2}{\theta^2}$.

D'où l'on tire par une méthode préciſément ſemblable à celle de l'Art. 122 de mon Traité de Dynamique, ſeconde Edition, & en conſervant les mêmes noms,

$$x = \frac{(\nu'\alpha + \nu'\gamma\zeta)\cos.\frac{t}{\theta}\sqrt{\Delta+\nu\varphi}}{\nu'-\nu} - \frac{\nu(\alpha+\nu'\zeta)\cos.\frac{t}{\theta}\sqrt{\Delta+\nu'\varphi}}{\nu'-\nu};$$

$$y = \frac{(\alpha+\nu\zeta)\cos.\frac{t}{\theta}\sqrt{\Delta+\nu\varphi}}{\nu-\nu'} - \frac{(\alpha+\nu'\zeta)\cos.\frac{t}{\theta}\sqrt{\Delta+\nu'\varphi}}{\nu-\nu'}.$$

Or en premier lieu, il eſt aiſé de reconnoître dans ces deux valeurs de x & de y la double oſcillation de M. Bernoulli (ou plutôt ce qu'il appelle ainſi) ſans avoir beſoin du détour qu'il employe pour cela; car il eſt viſible par les valeurs de x & de y, que le mouvement des corps m & n eſt compoſé de deux mouvemens pareils à ceux de deux pendules, dont le premier auroit pour

longueur $\frac{2a}{\Delta + \nu\varphi}$, & le ſecond $\frac{2a}{\Delta + \nu'\varphi}$. Et il eſt aiſé de s'aſſurer que ces pendules ſeront les mêmes que ceux de M. Bernoulli; en effet ſi γ & δ ſont les diſtances initiales, & qu'on ſuppoſe $\Delta\gamma + \Gamma\delta : \varphi\gamma + \Pi\delta :: \gamma : \delta$; on aura $\Delta\gamma\delta + \Gamma\delta\delta = \varphi\gamma\gamma + \Pi\delta\gamma$, & $\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\Delta - \Pi \pm \sqrt{\Delta - \Pi^2 + 4\Gamma\varphi}}{2\varphi}$; donc les deux valeurs de $\frac{\gamma}{\delta}$ ſont $-\nu$ & $-\nu'$; de plus la longueur du pendule iſochrone dans ce dernier cas, ſeroit $\frac{2a}{\Delta + \frac{\Gamma\delta}{\gamma}} = \frac{2a}{\Delta + \frac{\Gamma}{-\nu}} = \frac{2a}{\Delta + \nu'\varphi}$, ou $\frac{2a}{\Delta + \frac{\Gamma}{-\nu'}} = \frac{2a}{\Delta + \nu\varphi}$. Donc &c.

En faiſant $dx = o$, $dy = o$ dans les valeurs de x & de y, on aura les vibrations de chaque corps; & il eſt très-évident que ces vibrations ſeront iſochrones ſi $\alpha + \nu\zeta = o$, ou ſi $\alpha + \nu'\zeta = o$. Mais il ne me paroît pas prouvé que dans aucun autre cas elles ne ſeront iſochrones. Par exemple ſi $\Delta + \nu'\varphi = 4(\Delta + \nu\varphi)$, on aura $dx = o$, & $dy = o$, ſi $-\nu'\alpha - \nu\nu'\zeta \text{ ſin.} \frac{t}{\theta}\sqrt{\Delta + \nu\varphi} + (\nu\alpha + \nu\nu'\zeta) 2 \text{ ſin.} \frac{2t}{\theta}\sqrt{\Delta + \nu\varphi} = o$, & ſi $(-\alpha - \nu\zeta) \text{ ſin.} \frac{t}{\theta}\sqrt{\Delta + \nu\varphi} + (\alpha + \nu'\zeta) 2 \text{ ſin.} \frac{2t}{\theta}\sqrt{\Delta + \nu\varphi} = o$.

Or

Or ſi ces équations ne donnent point d'autres valeurs réelles & poſſibles à ſin. t, que ſin. $t = o$, les oſcillations ſeront toutes ſynchrones. C'eſt ce qui arrivera, par exemple, ſi 1 eſt plus petit que les deux quantités $\frac{\alpha + \nu C}{4(\alpha + \nu' C)}$ & $\frac{(\alpha + \nu C)\nu'}{4\nu(\alpha + \nu' C)}$; or pour cela il ſuffit, par exemple, que $\alpha + \nu' C$ ſoit fort petit, ſans être abſolument $= o$; c'eſt-à-dire, que $\frac{\alpha}{C}$ ſoit preſqu'égal à $-\nu'$. Je n'entre point là-deſſus dans un plus grand détail, parce que je ferai voir plus bas dans l'Art. ſuivant, que le ſynchroniſme des vibrations peut avoir lieu, quoique la force accélératrice ne ſoit pas comme la diſtance.

Au reſte, la méthode que nous employons ici pour trouver le mouvement de deux corps, peut s'appliquer aiſément aux cas où il y aura tant de corps qu'on voudra. Le Problême eſt préciſément de la même nature que celui que j'ai réſolu dans la ſeconde Edition de mon Traité de Dynamique, Art. 130 & 131. Enfin notre ſolution peut s'appliquer encore à pluſieurs autres cas, auxquels il me ſemble que celle de M. Bernoulli réuſſiroit difficilement; par exemple, celui où les deux corps auroient des viteſſes initiales données, & celui où ils ſe mouvroient dans un milieu réſiſtant comme la viteſſe. Mais ce détail me meneroit trop loin. *Voyez* le Traité que je viens de citer, Art. 126 & 132.

M. Bernoulli, pour preuve de la ſupériorité, de l'excellence & de la généralité de ſa méthode, prétend avoir

réſolu par le moyen de cette méthode le problême des cordes vibrantes d'une épaiſſeur inégale, ſuivant une loi donnée; Problême que ma méthode & celle de M. Euler ne peuvent réſoudre que pour des cas particuliers. Si M. Bernoulli jugeoit à propos de publier ſa ſolution, qu'il annonce dans le Journal des Savans déja cité, je crois qu'elle ne différeroit point, quant à l'eſſentiel, de celle que j'ai donnée du même Problême au commencement de ce Mémoire. La ſeule choſe ſur laquelle nous ſerions vraiſemblablement partagés, c'eſt que M. Bernoulli donneroit cette ſolution pour générale, & qu'il ne m'eſt pas démontré qu'elle le ſoit. Quoi qu'il en ſoit, on ne ſauroit trop l'inviter à publier ſes recherches ſur ce ſujet. Elles ne pourront qu'être utiles à l'éclairciſſement de cette matiere épineuſe & délicate.

§. XXVIII. Je pourrois remarquer en paſſant que la courbe dont l'équation eſt $y = \alpha \text{ ſin.} \frac{\pi x}{a} + \beta \text{ ſin.} \frac{2\pi x}{a}$ + &c. n'eſt point proprement un mélange de Trochoïdes Tayloriennes; puiſque les axes auxquels M. Bernoulli rapporte la plûpart de ces prétendues Trochoïdes, ſont courbes; & qu'en ces cas les courbes rapportées à ces axes, ne ſont plus des Trochoïdes. Je n'inſiſterai point là-deſſus, pour éviter toute diſpute de mots. Mais, ce qui eſt plus important, j'obſerverai que cette théorie de M. Bernoulli ne me paroît pas auſſi propre que M. Euler le penſe, à expliquer *ce que les vibrations particulieres ont de phyſique.* Pour le prouver, je ſuppoſerai, avec

M. Bernoulli, que la corde ait la figure $Apa B$ (*fig.* 12.), telle que $y = \alpha \text{ sin. } \frac{\pi x}{a} + \beta \text{ sin. } \frac{2\pi x}{a}$, a étant son point de milieu ; & pour rendre le calcul plus simple, je suppoſerai encore $p m = \frac{q \varphi}{2}$, comme $A a$ eſt la moitié de AB. La force motrice en p par rapport au point m ſera la même qu'elle ſeroit au point a de la courbe $Aa B$; & comme ces forces motrices égales ont à mouvoir des maſſes qui ſont entr'elles comme $r a$ eſt à $p m$, il s'enſuit que les forces accélératrices ſeront en a & en p comme $\frac{1}{a r}$ eſt à $\frac{1}{p m}$: donc ſi on nomme φ la force motrice en a, & qu'on faſſe $a r = A$, $p m = \alpha = \frac{A}{2}$, $r V = x$, $m u = z$; on trouvera que la viteſſe en V eſt $\sqrt{\varphi} \cdot \frac{\sqrt{AA - xx}}{AA}$, & que la viteſſe en u eſt $\sqrt{\varphi} \cdot \frac{\sqrt{aa - zz}}{aa}$. De-là il s'enſuit, 1°. que ſi on décrit des rayons $a r = A$, & $p m = \frac{a r}{2}$ deux demi-cercles $a La'$, $p l o$ (*fig.* 13.), on pourra ſuppoſer la viteſſe en V repréſentée par l'ordonnée LV, & le tems par l'arc $a L$; la viteſſe en u par le double de l'ordonnée $u l$, & le tems par l'arc $p l$; d'où il eſt viſible que tandis que le point a parcourt $a r$, le point p parcourra $p o$; 2°. que ſi on prend les arcs $q Z$, $o z$ égaux entr'eux, & tels que $y z = \frac{Y Z}{2}$, on aura $a Y + p y$ pour la plus grande ex-

curſion abſolue du point p (*fig.* 12.); parce qu'alors la viteſſe de ce point ſera $= o$; 3°. que le tems de cette excurſion ſera $a\,q\,Z$, ou (ce qui eſt la même choſe) $p\,K\,o + o\,z$. 4°. Que quand le point a (*fig.* 13.) eſt en a', & que le point p eſt revenu en p, la viteſſe abſolue du point p (*fig.* 12.) eſt alors encore $= o$, & l'eſpace parcouru $= Y\,a' - y\,p$, c'eſt-à-dire $y\,p - Y\,a'$ en ſens contraire, & le tems de la ſeconde excurſion $= Z\,a'$. 5°. On verra de même facilement que le point p parcourt enſuite dans le tems $a'\,Z$, & dans le ſens de la premiere excurſion, un eſpace $= y\,p - Y\,a'$; & qu'enfin il parcourt en ſens contraire dans le tems $Z\,a$ un eſpace $= a\,Y + y\,p$; donc ſi on fait $a\,Y$ (*fig.* 14.) $= a\,Y$ (*fig.* 13.) $Y\,p$ (*fig.* 14.) $= p\,y$ (*fig.* 13.); $p\,R$ (*fig.* 14.) $= p\,y - Y\,a'$ (*fig.* 13.); on verra, que tandis que le point a (*fig.* 12.) va de a en a' & de a' en a, le point p de la fig. 12. va d'abord (*fig.* 14.) de a en p, puis de p en R, puis de R en p, puis de p en a. Le point p (*fig.* 12.) fera donc à la vérité deux vibrations, pendant que le point a en fait une; mais le tems de ces deux vibrations ſera différent; celui de la premiere ſera repréſenté par l'arc $a\,Z$ (*fig.* 13.); & celui de la ſeconde, par l'arc $Z\,a'$ qui eſt plus petit. Ainſi on ne pourra pas dire que le point p (*fig.* 12.) fait l'octave aigue, tandis que le point a rend le ſon fondamental; il faudroit pour cela que le point p fît deux vibrations d'*une égale durée*, tandis que le point a en fait une; car ſi les deux vibrations ne ſont pas d'égale durée, le point p, ſuivant les principes de l'Acouſtique,

fendra deux ſons différens ; le premier plus grave, le ſecond plus aigu que l'octave du ſon fondamental.

La théorie de M. Bernoulli ne peut donc ſervir à expliquer la multiplicité des ſons, telle que les obſervations la donnent. D'ailleurs on ſait que les ſons les plus ſenſibles dans cette multiplicité, ſont la douziéme & la dix-ſeptiéme. Pourquoi cette préférence accordée par la nature ? Et quelle raiſon M. Bernoulli en rendra-t-il (*a*) ?

Reconnoiſſons donc que tous ces faits ſont une énigme inexplicable pour nous. En effet, peut-on ſe flatter de les expliquer, en regardant le mouvement des points de la corde comme compoſé de pluſieurs autres, en ſuppoſant des ventres fictifs & des nœuds mobiles ? Il n'y auroit rien, ce me ſemble, dont on ne pût rendre raiſon par une méthode ſi arbitraire.

D'ailleurs, & cette conſidération eſt encore plus forte que toutes les autres, il y a bien des cas, où malgré ces ventres fictifs & ces nœuds mobiles, les vibrations des points de la corde ſeront abſolument & rigoureuſement ſynchrones ; ce qui renverſe toute la théorie de M. Bernoulli. Pour le prouver, je ſuppoſe avec lui que $y = a$ ſin. $\pi x + b$ ſin. $2\pi x$ ſoit l'équation de la courbe initiale ; on trouvera aiſément par ma méthode,

(*a*) Voyez ſur cela l'article FONDAMENTAL dans le ſeptiéme Volume de l'Encyclopédie. Il contient pluſieurs autres objections contre l'explication donnée par M. Bernoulli, de la multiplicité des ſons rendus par une même corde. On y réfute auſſi quelques autres explications qui ont été données du même phénomene.

clure ; 1°. que la ſolution que j'ai donnée le premier du Problême des cordes vibrantes, n'eſt nullement renfermée dans la ſolution de M. Taylor, s'étend beaucoup plus loin, & eſt auſſi générale que la nature de la queſtion le permet ; 2°. que l'extenſion que M. Euler y a voulu donner, eſt capable d'induire en erreur ; 3°. que ſa conſtruction eſt contraire à ce qu'il avance lui-même en termes formels ſur l'*identité* & l'*imparité* des fonctions $\varphi(x+t)$ & $\Psi(x-t)$; 4°. que cette conſtruction ne ſatisfait point à l'équation $\frac{d\,d\,y}{d\,t^2} = \frac{d\,d\,y}{d\,x^2}$; 5°. que dans l'équation $y = \varphi(x+t) + \Psi(x-t)$, les fonctions doivent demeurer toujours de la même forme, comme M. Euler l'a tacitement ſuppoſé lui-même ; 6°. que ſi on ſe permettoit de faire varier la forme de ces fonctions, il faudroit renverſer le principe de toutes les conſtructions & ſolutions analytiques, & des démonſtrations les plus généralement avouées ; 7°. qu'en faiſant varier cette forme, le Problême n'auroit plus de ſolution poſſible, & reſteroit indéterminé ; 8°. que cette ſolution ne repréſente pas mieux que la mienne, le vrai mouvement de la corde ; 9°. enfin que la ſolution de M. Daniel Bernoulli, quelqu'ingénieuſe qu'elle puiſſe être, eſt trop limitée, & n'ajoute abſolument à la mienne aucune ſimplification ; qu'en un mot, le calcul analytique du Problême, & l'examen ſynthétique que M. Bernoulli m'accuſe à tort de n'avoir point fait, ſont l'un & l'autre, ce me ſemble, à l'avantage de ma méthode.

SUPPLÉMENT

SUPPLÉMENT

Au Mémoire précédent sur les Cordes vibrantes.

AU commencement de Septembre 1759, long-tems après avoir achevé l'Ecrit qu'on vient de lire, je reçus un excellent Ouvrage, intitulé, *Miscellanea Physico-Mathematica Societatis privatæ Taurinensis, Tomus primus.* Dans ce Recueil j'ai trouvé un savant & profond Mémoire de M. *Louis de la Grange*, où cet habile Géometre examine la question que je viens d'agiter avec M M. Bernoulli & Euler. M. de la Grange donne dans ce Mémoire une très-belle méthode pour trouver le mouvement d'une corde chargée d'autant de poids qu'on voudra; & supposant ensuite le nombre des corps infini, ce qui est le cas de la corde vibrante, il arrive précisément à la même conclusion que M. Euler; d'où il conclud; 1°. contre M. Bernoulli, que la courbe vibrante n'est pas toujours un mélange de Trochoïdes; 2°. contre moi, qu'il n'est pas nécessaire que les différentes courbes AMB, Amb, $B\mu a$ &c. (*fig.* 9.) soient assujetties à la loi de continuité. Cette théorie de M. de la Grange me fournira quelques remarques.

Je dois d'abord les plus grands éloges à la maniere aussi savante qu'ingénieuse, dont M. de la Grange détermine le mouvement d'une corde chargée d'autant de

poids qu'on voudra. Quoique la méthode que j'ai donnée, pour intégrer dans ce cas les équations différentielles, conduise à la ſolution du Problême, quel que ſoit le nombre des corps ; j'avoue cependant qu'il y a beaucoup de mérite à avoir trouvé une formule générale pour un nombre de corps indéfini. Je n'avois point cherché cette formule ; parce que d'un côté je voyois que ma méthode donneroit toujours infailliblement une formule plus ou moins compoſée pour tel nombre fini de corps qu'on voudroit ; & parce que de l'autre, je ne voyois point comment après avoir trouvé une formule générale pour tel nombre fini de corps qu'on voudroit ; on pourroit appliquer cette formule à un nombre infini de corps. Je me contentai donc de dire (*), qu'en regardant la corde vibrante comme un fil extenſible chargé de pluſieurs petits poids, on pourroit toujours déterminer *à-peu-près* ſon mouvement, & d'autant plus exactement, que le nombre des poids ſuppoſés ſeroit plus grand.

Cet *à-peu-près* ne ſignifie pas, comme M. de la Grange paroît le croire, qu'on ne puiſſe trouver exactement par ma méthode le mouvement d'un fil extenſible chargé d'un nombre de poids fini, mais très-grand ; il eſt évident par la nature même de cette méthode, qu'elle donnera toujours la loi de ce mouvement, quel que ſoit le nombre des corps ; l'*à-peu près* ſignifie ſeulement, dans l'en-

(*) Voyez l'Article XLIV. de mon Mémoire imprimé parmi ceux de l'Académie de Berlin de 1747.

droit cité de mon Mémoire de 1747, que le mouvement d'une corde vibrante doit être *à-peu-près* le même dans la théorie, que celui d'un fil extensible chargé d'un très-grand nombre de poids. Je dis dans la *théorie*; car nous avons fait voir dans l'Art. XXIII. du Mémoire précédent, que l'expérience & la théorie ne fauroient être d'accord dans la détermination du mouvement des cordes vibrantes, ne fût-ce que par cette seule raison, que le mouvement d'une corde vibrante cesse bientôt, quoique par la théorie il doive durer continuellement. Au reste, j'ai donné dans l'Art. XXII. du Mémoire ci-dessus quelques modifications à cette assertion même de mon Mémoire de 1747, & j'ai observé qu'il pourroit bien se faire que le mouvement de la corde fût sensiblement différent, même *dans la théorie*, du mouvement du polygone circonscrit, quelque grand nombre de côtés qu'on lui supposât.

Quoi qu'il en soit, M. de la Grange, après avoir trouvé, par une très-belle & très-savante analyse, le mouvement d'un fil chargé d'un nombre quelconque de poids, a essayé de déduire de cette formule le mouvement de la corde, en supposant le nombre de poids infini. Mais quelqu'adresse & quelque sagacité qu'on remarque dans son calcul, & dans les moyens qu'il prend pour réduire ce second cas au premier, il me semble que tout ce calcul est appuyé sur plusieurs suppositions illégitimes.

1°. M. de la Grange prétend qu'en supposant $n = \infty$

& π = à la circonférence, les angles $\frac{\pi}{4m}$, $\frac{2\pi}{4m}$, $\frac{3\pi}{4m}$ &c. que sa formule renferme, deviennent infiniment petits, & ne different pas de leurs sinus. Cela est vrai en général pour tout angle $\frac{r\pi}{4m}$, r étant un nombre fini; mais si $r = m - 1$, comme il arrive dans un des termes de la formule de M. de la Grange, alors $\frac{r\pi}{4m} = \frac{\pi}{4}$, & l'angle ne se confond plus avec son sinus.

2°. M. de la Grange prétend que si on appelle x une portion quelconque de la corde, a la corde entiere, t le tems, H & T deux constantes, $\frac{mx}{a} + \frac{mHt}{T}$ sera toujours un nombre entier, si on suppose m infini; ensorte que $\sin.\frac{\pi}{2}\left(\frac{mx}{a} + \frac{mHt}{T}\right)$ sera toujours $= a$. Cette assertion me surprend, & ne me paroît nullement fondée. Car pourquoi un nombre infini est-il nécessairement un nombre entier? L'infini n'est point proprement un nombre, il est la limite de tous les nombres possibles: & sous ce point de vûe, il n'est proprement, ni entier, ni fractionnaire, ni incommensurable. Ce qu'on pourroit tout au plus accorder à M. de la Grange, c'est que le nombre infini m peut être regardé & traité comme un nombre entier, parce que dans le cas où le nombre m des corps est fini, quelque grand qu'il soit, m est toujours un nombre entier. Mais de-là même il s'ensuit évidemment que

$\frac{mx}{a} + \frac{mHt}{T}$ n'eſt pas toujours un nombre entier; ce qui arrive, par exemple, quand $\frac{x}{a} + \frac{Ht}{T}$ eſt un incommenſurable. Il eſt vrai que m étant infini, $\frac{mx}{a} + \frac{mHt}{T}$ peut toujours être regardé comme égal à un nombre entier infini, plus une fraction finie, qui eſt infiniment petite par rapport à ce nombre infini. Mais il ne s'enſuit pas de-là, que $\text{ſin.}\frac{\pi}{2}\left(\frac{mx}{a} + \frac{mHt}{T}\right)$ ſoit $= \rho$; car ſoit $\frac{mx}{a} + \frac{mHt}{T} = m' + \rho$, m' étant un nombre entier infini, & ρ une fraction finie, on aura $\text{ſin.}\frac{\pi}{2}\left(\frac{mx}{a} + \frac{mHt}{T}\right) = \text{ſin.}\left(\frac{\pi m'}{2} + \frac{\pi\rho}{2}\right)$ $= \pm \text{ſin.}\frac{\pi\rho}{2}$, ſavoir $+$, quand m' eſt pair, & $-$, quand m eſt impair; or $\text{ſin.}\frac{\pi\rho}{2}$ eſt une quantité finie.

Si le raiſonnement de M. de la Grange étoit vrai, il s'enſuivroit que le ſinus d'un arc quelconque $\frac{\pi x}{2a} + \frac{\pi Ht}{2T}$ (*), cet arc étant pris une infinité m de fois, ſeroit toujours $= o$; c'eſt-à-dire, que le ſinus d'une infinité de fois 45 degrés, par exemple, ſeroit toujours $= o$. Or cela eſt évidemment faux. Car le ſinus d'une infinité de fois 45

(*) Il eſt évident que x & t étant indéterminées & variables à volonté $\frac{x}{a} + \frac{Ht}{T}$ repréſente un nombre quelconque.

degrés, peut être, ou o, ou $\pm\sqrt{2}$, ou ± 1, selon les valeurs qu'on donne à m'.

3°. M. de la Grange prétend dans un autre endroit de sa solution, que $\frac{mX}{a}$ étant un nombre infini $= \mu$ (X est ici une portion de la corde indéterminée, & différente de x) & s étant un nombre entier quelconque positif ou négatif, on aura $\cos.\frac{\pi}{2}\left(2ms \pm \frac{mX}{a}\right) = \mp 1$, le signe $-$ étant pour le cas où μ est impair, & le signe $+$ pour le cas où μ est pair. Cette assertion est fondée sur ce qu'il regarde toujours $\frac{mX}{a}$ comme un nombre entier; & elle est par conséquent sujette aux mêmes difficultés que nous venons de faire sur la supposition de $\frac{mx}{a} + \frac{mHt}{T}$ égal à un nombre entier.

4°. M. de la Grange semble avoir bien senti ou prévu ces difficultés; & il a destiné un Chapitre de son Mémoire, à établir la proposition sur laquelle, de son propre aveu, sa théorie des cordes vibrantes est fondée; savoir sur ce qu'une suite infinie de produits de deux sinus, dont les arcs croissent en progression arithmétique, est toujours $= o$, excepté dans le cas où les arcs sont égaux. Pour démontrer cette proposition, l'Auteur la réduit à prouver que $\cos. x + \cos. 2x + \cos. 3x$ &c. à l'infini $= -\frac{1}{2}$, excepté dans le cas de $x = o$. Pour démontrer que $\cos. x + \cos. 2x + \cos. 3x$ &c. $= -\frac{1}{2}$ l'Auteur prend l'expression imaginaire des cosinus; & il transforme par ce moyen

la ſerie propoſée en deux autres qui forment évidemment une progreſſion géométrique dont il cherche la ſomme; il trouve cette ſomme $= -\frac{1}{2}$. Mais pour arriver à ce réſultat, il fait une ſuppoſition qui ne paroît point exacte; ſavoir, que le dernier terme des deux progreſſions infinies $e^{x\sqrt{-1}} + e^{2x\sqrt{-1}} +$ &c. & $e^{-x\sqrt{-1}} + e^{-2x\sqrt{-1}} +$ &c. eſt égal à zero, ce qui n'eſt pas vrai; car ce dernier terme eſt dans la premiere progreſſion $e^{\infty\sqrt{-1}}$ & dans la ſeconde $e^{-\infty\sqrt{-1}}$, quantités qui ne ſont ni l'une ni l'autre $= 0$. Pour voir encore plus clairement la mépriſe de M. de la Grange, il ſuffit de conſidérer, que ſuivant ſon propre calcul, la ſomme exacte d'un nombre quelconque m de termes dans la progreſſion cof. $x +$ cof. $2x +$ cof. $3x +$ &c. eſt $\frac{\text{cof. } mx - \text{cof. } (m+1)x}{2(1-\text{cof. } x)} - \frac{1}{2}$. Or, ajoute-t-il, dans le cas où $m = \infty$, on ſuppoſe que l'1 s'évanouit auprès de m, d'où le terme cof. $(m+1)x$ devient $=$ cof. mx, & la formule précédente ſe réduit à $-\frac{1}{2}$. Il eſt aiſé de répondre, que quand m eſt infini, cof. $(m+1)x$ ne devient pas égal pour cela à cof. mx. Car deux arcs finis ou infinis, qui different d'une quantité finie x, ont des cofinus qui different auſſi d'une quantité finie. Un exemple très-ſimple peut nous convaincre d'ailleurs, que la ſomme des cofinus des angles x, $2x$, $3x$, n'eſt pas $= -\frac{1}{2}$. Car ſoit $x = 45^{\circ}$, on aura pour la ſuite dont il s'agit $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 0, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, -1, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, 0,

$+\frac{1}{\sqrt{2}}$, $+1$, &c. après quoi la ſuite recommencera; or la ſomme de cette ſuite finie eſt, ou $\frac{1}{\sqrt{2}}$, ou 0, ou -1, ou $-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$, ſelon qu'on y prendra plus ou moins de termes. Donc la ſomme de la ſuite entiere eſt auſſi, ou $\frac{1}{\sqrt{2}}$, ou 0, ou -1, ou $-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$, ſelon le nombre de termes qu'on y prendra, quel que ſoit d'ailleurs ce nombre de termes, fini ou infini; & cette ſomme ne ſera point $=0$, à moins que $m \times 45°$ ne ſoit $=$ à une infinité de fois la circonférence, ou $135°$ $+$ une infinité de fois la circonférence.

Ce n'eſt pas tout. M. de la Grange convient que quand on voudra traiter la théorie des cordes vibrantes, par la conſidération des fonctions algébriques, comme M. Euler & moi l'avons fait; cette théorie ne pourra s'appliquer qu'aux courbes continues, & à cet égard il me donne abſolument gain de cauſe. Or je le prie de conſidérer qu'il ſuppoſe lui-même tacitement dans ſa ſolution toute la théorie des fonctions algébriques. Car un des principaux fondemens de cette ſolution conſiſte dans l'uſage qu'il fait de la méthode de M. Bernoulli, pour trouver la valeur d'une quantité qui eſt égale dans certains cas à $\frac{0}{0}$. Or cette méthode ſuppoſe elle-même que la quantité dont on cherche la valeur ſoit une fonction algébrique fractionnaire, que l'on différentie ſuivant les régles connues, & dont le numérateur diviſé

par

par le dénominateur, donne la valeur de la quantité qu'on cherche.

C'eſt pourquoi la théorie de M. de la Grange ſur les cordes vibrantes, quelque profonde & quelqu'ingénieuſe qu'elle ſoit, porte ſur des fondemens qui ne me paroiſſent pas aſſez ſolides pour renverſer la mienne; & en effet la théorie de M. de la Grange aboutiſſant à la même concluſion que celle de M. Euler, eſt ſujette aux mêmes difficultés que j'ai faites ci-deſſus contre la ſolution de ce grand Géometre; difficultés qui me paroiſſent inſolubles, & qui ſont tirées de la conſidération directe du Problême, & de l'examen, tant ſynthétique, qu'analytique de la queſtion propoſée.

Fin du premier Mémoire & du Supplément.

SECOND MÉMOIRE.

Du Mouvement d'un corps de figure quelconque, animé par des forces quelconques.

DANS mes *Recherches ſur la préceſſion des Equinoxes*, j'ai donné tous les principes néceſſaires pour réſoudre le Problême que je me propoſe ici. Mais comme dans l'Ouvrage que je viens de citer, je n'ai appliqué ces principes en détail qu'au mouvement de rotation que la Terre doit avoir ſur ſon centre, en vertu de l'action du Soleil & de la Lune, je crois devoir donner ici la ſolution générale du Problême, tirée des mêmes principes, & réduite à des formules générales qu'on pourra conſulter au beſoin.

I.

Pour repréſenter d'une maniere générale le mouvement d'un corps de figure quelconque, il faut diſtinguer dans ce corps deux mouvemens: 1°. celui du centre de gravité, qui eſt commun à toutes les parties du corps; ce centre décrit une ligne quelconque, droite ou courbe,

à simple ou à double courbure ; nous pourrions prendre ici tout autre point que le centre de gravité ; mais les propriétés connues de ce centre donnent le moyen de simplifier les équations ; cette raison nous détermine à choisir ce point par préférence ; 2°. le mouvement de rotation de chaque particule autour du centre de gravité. Pour me faire une idée bien nette de ce dernier mouvement, j'imagine d'abord, ainsi que je l'ai fait dans mes *Recherches sur la précession des Equinoxes*, une ligne Cp (*figure* 15.) qui passe par le centre de gravité C du corps, & qui demeure toujours fixe au-dedans du corps ; c'est-à-dire, qui passe toujours par les mêmes points dans l'intérieur du corps, & qu'on peut regarder par conséquent comme l'axe du corps, mais axe mobile autour du centre de gravité C ; j'imagine de plus un plan quelconque absolument fixe & immobile $ZCez$, qui passe aussi par le centre C, & auquel je rapporte le mouvement de l'axe Cp ; j'imagine enfin un plan $KC'H$ qui passe par un point quelconque C' de l'axe Cp, & qui soit perpendiculaire à cet axe. Cela posé,

Soit pe perpendiculaire au plan $ZCez$; Ce la commune section du plan Cpe, & du plan $ZCez$; ZCz une perpendiculaire à Ce, menée dans le plan $ZCez$; KC' la commune section des plans $KC'H$, Cpe ; G un point quelconque du corps, placé dans le plan $KC'H$; GL une perpendiculaire à $C'K$ dans le plan $KC'H$; & $C'H$ une parallèle à GL, ou, ce qui revient au même, à ZCz.

L'axe Cp, dont nous regardons ici l'extrémité C comme fixe, ne peut avoir que deux mouvemens; l'un de rotation autour de la ligne immobile CE' perpendiculaire au plan immobile $ZCez$; l'autre, par lequel son extrémité p s'abbaiſſe ou s'éleve au-deſſus du plan $ZCez$, les autres points de l'axe Cp s'élevant ou s'abbaiſſant auſſi à proportion; & il eſt évident, que pour trouver le mouvement de l'axe Cp, il ſuffira de connoître la courbe décrite ſur le plan $ZCez$ par la projection e du point p.

II.

Ce n'eſt pas tout: lorſque l'axe Cp, mobile autour de C, a parcouru un chemin quelconque, en entraînant, pour ainſi dire, avec lui les lignes Ce, ZCz, dont l'une eſt toujours la projection de Cp, & dont l'autre ZCz eſt toujours perpendiculaire à Ce; le plan $KC'H$, dans lequel eſt placé le point G, demeure toujours perpendiculaire à l'axe Cp; mais l'angle $KC'G$ que fait la ligne GC' avec la commune ſection KC' des plans $KC'H$, Cpe, peut être augmentée d'un angle P, qui ſera évidemment le même pour tous les points placés dans le plan $KC'H$, puiſque ces points ſont conſtamment à la même diſtance les uns des autres & du point C'. Il eſt viſible de plus, que cet angle P ſera auſſi le même pour tous les points placés dans un autre plan quelconque parallèle à $KC'H$. Car il eſt évident qu'il ſeroit le même pour tous les points d'un plan qui paſſeroit par G & par l'axe Cp; donc &c.

III.

Soient préſentement

La conſtante Cp . . . . . a

pC' . . . . . b

Par conſéquent CC' . . . . . $a - b$

Le coſinus de l'angle pCe . . . . . y

Son ſinus . . . . . $\sqrt{1 - yy}$

Par conſéquent Ce . . . . . $y \times Cp$

ou ay

Et pe . . . . . $a\sqrt{1 - yy}$

$C'G$ . . . . . f

L'angle $KC'G$ X

Par conſéquent GL . . . . . f ſin. X

Et $C'L$ . . . . . f coſ. X

La diſtance du point G au plan $ZCez$ . . . . . π

Sa diſtance au plan $E'Zz$ . . . . . ρ

Sa diſtance au plan $E'Ce$ . . . . . ϖ

On aura, comme il eſt très-aiſé de le voir par les Elémens de Géométrie, & comme je l'ai démontré, Article 25 de mes *Recherches ſur la préceſſion des Equinoxes*,

$\pi = (a - b)\sqrt{1 - yy} + fy$ coſ. X;

$\rho = (a - b)y - f$ coſ. $X\sqrt{1 - yy}$;

$\varpi = f$ ſin. X.

IV.

Soit g (*figure* 16.) la projection du point G ſur le plan fixe $ZCez$; & ayant mené les perpendiculaires

gl à Ce, & gk à Cz, on aura évidemment gl ou $Ck = \varpi$; & Cl ou $gk = \rho$. Imaginons enſuite dans le plan $ZCez$, deux lignes abſolument fixes & immobiles ACB, CD, perpendiculaires l'une à l'autre; & ſoit l'angle $zCB = e$. En menant les lignes gm, kn perpendiculaires à CB, & km parallele à CB, on aura $gN = gm - mN = gm - kn = gk \times \text{cof.}\, e - Ck \times \text{ſin.}\, e$; & $CN = Cn + nN = Cn + km = Ck \cdot \text{cof.}\, e + gk \cdot \text{ſin.}\, e$. Donc ſi on fait $CN = z$ & $gN = u$, on aura

$$\left.\begin{aligned} z &= \varpi \,\text{cof.}\, e + \rho \,\text{ſin.}\, e \\ u &= \rho \,\text{cof.}\, e - \varpi \,\text{ſin.}\, e \end{aligned}\right\} (A)$$

Si la ligne fixe AB étoit de l'autre côté de Zz, on auroit

$$\left.\begin{aligned} z &= \varpi \,\text{cof.}\, e - \rho \,\text{ſin.}\, e \\ u &= \rho \,\text{cof.}\, e + \varpi \,\text{ſin.}\, e \end{aligned}\right\} (B)$$

Si on regarde AB comme repréſentant la poſition de Zz au premier inſtant du mouvement, alors e ſera l'angle parcouru durant le tems t (qui s'eſt écoulé depuis ce premier inſtant) par le point e, qui eſt la projection de l'extrémité de l'axe du corps; ſi le mouvement du point e ſe fait de e vers z, il faudra ſe ſervir des deux formules (A); ſi au contraire ce mouvement ſe fait de e vers Z, il faudra ſe ſervir des formules (B); & ce ſeront les formules que nous adopterons ici; car nous ſuppoſerons que le mouvement du point e ſe faſſe de e vers Z.

Soit enfin ξ la valeur de l'angle $KC'G$ (*figure* 15.) au commencement du mouvement, ξ étant différent pour chaque point G; & comme cet angle ξ devient (*hyp.*) $\xi + P$ après le tems t, on aura .... $X = \xi + P$.

Donc cof. $X = \text{cof. } \xi + P = \text{cof. } \xi \text{ cof. } P - \text{ſin. } \xi$ ſin. P ; & ſin. $X = \text{ſin. } \xi + P = \text{ſin. } \xi \text{ cof. } P + \text{ſin. } P$ cof. ξ ; donc après un tems quelconque t, la diſtance du point G au plan $EZCz$, ſera

$$\pi = a - b(\sqrt{1 - yy}) + fy \text{ cof. } \xi \text{ cof. } P - fy \text{ ſin. } \xi \text{ ſin. } P ;$$

La diſtance de la projection g (*fig.* 16.) du point G à la ligne fixe CB, ſera

$$u = [(a - b)y - f \text{ cof. } \xi \text{ cof. } P\sqrt{1 - yy} + f \text{ ſin. } \xi \text{ ſin. } \sqrt{1 - yy}] \text{ cof. } e + [f \text{ ſin. } \xi \text{ cof. } P + f \text{ ſin. } P \text{ cof. } \xi] \times \text{ſin. } e ;$$

Et la diſtance de la projection g à la ligne fixe CD, ſera

$$z = [f \text{ ſin. } \xi \text{ coſin. } P + f \text{ ſin. } P \text{ coſin. } \xi] \text{ coſin. } e - [(a - b)y - f \text{ cof. } \xi \text{ cof. } P \sqrt{1 - yy} + f \text{ ſin. } \xi \text{ ſin. } P \sqrt{1 - yy}] \text{ ſin. } e.$$

V.

Il eſt clair que dans le tems dt le point G (*fig.* 15.) parcourra perpendiculairement au plan $ZCez$, & parallèlement à CE', l'eſpace $d\pi$; parallèlement à CD (*fig.* 16.) l'eſpace du ; & parallèlement à CB l'eſpace dz.

Donc ſi on ſuppoſe que le centre C parcourre durant ce même tems les eſpaces dq, ds, dx, dans des directions parallèles à ces mêmes lignes ; le mouvement total, ou la viteſſe du point G à l'inſtant dt ſera $\frac{dq + d\pi}{dt}$ parallèlement à CE' ; $\frac{ds + du}{dt}$ parallèlement à CD ;

$\frac{dx+dz}{ds}$ parallèlement à CB; & dans l'instant suivant & égal dt, les vitesses seront,

$$\frac{dq'+d\pi'}{dt} = \frac{dq+ddq+d\pi+dd\pi}{dt}$$

$$\frac{ds'+du'}{dt} = \frac{ds+dds+du+ddu}{dt}$$

$$\frac{dx'+dz'}{dt} = \frac{dx+ddx+dz+ddz}{dt}.$$

Donc si on nomme θ le tems durant lequel la pesanteur p feroit parcourir à un corps pesant l'espace a, on aura la force perdue par le point G parallèlement à $CE' = \frac{dq+d\pi-dq'-d\pi'}{dt^2} \times \frac{\theta^2 p}{2a} = \frac{(-ddq-dd\pi)p\theta^2}{2adt^2}$; on aura de même la force perdue par le point G parallèlement à $CD = \frac{-dds-ddu}{dt^2} \times \frac{p\theta^2}{2a}$; & la force perdue par le même point parallèlement à $CB = \frac{-ddx-ddz}{dt^2} \times \frac{p\theta^2}{2a}$. Ces trois forces doivent faire équilibre avec celles qui tendent à mouvoir le corps, & qu'on peut toujours réduire à trois, dont l'une agisse parallèlement à CE', la seconde parallèlement à CD, la troisiéme parallèlement à CB.

VI.

On a vû (*Tr. de Dyn.* Art. 58) que si le point Q (*fig.* 17.) du plan $E'Cz$ est tiré perpendiculairement à ce plan, & parallèlement à Ce par une puissance G, le point V du plan $ZCez$ perpendiculairement à ce plan, & parallèlement

lèlement à CE' par une puiſſance $= \Pi$; enfin le point G du plan $E'Ce$ parallèlement à $C\zeta$ par une puiſſance $= F$; on aura, dans le cas d'équilibre entre les trois puiſſances G, F, Π, ſoit que le point C ſoit fixe ou non, les équations ſuivantes ;

$$F\zeta - \Pi\mu = o$$
$$G\xi - \Pi\nu = o$$
$$F\theta - G\chi = o$$

en ſuppoſant les perpendiculaires QP' ou $CD = \xi$; QD ou $CP' = \chi$; GH ou $CE' = \zeta$; GE' ou $CH = \theta$; $\nu\pi$ ou $CR = \mu$; νR ou $C\pi = \nu$; & ſi le point C eſt libre, on aura de plus

$$F = o$$
$$G = o$$
$$\Pi = o$$

VII.

Il eſt évident qu'on peut regarder la force F comme réſultante de tant d'autres forces qu'on voudra, toutes perpendiculaires au plan $E'CH$; que la force F ſera en ce cas égale à la ſomme de ces forces ; & que le moment $F\zeta$ de la force F par rapport à la ligne CH (j'appelle ainſi le produit de la force F par la diſtance de ſa direction à la ligne CH) ſera égal à la ſomme des momens de ces forces par rapport à la même ligne CH ; il en eſt de même des autres forces G, Π.

Enfin il eſt évident que les loix de l'équilibre qu'on vient de trouver pour les forces F, G, Π, auront égale-

ment lieu par rapport à trois autres lignes CD, CB, CE' (*figure* 18.), auxquelles on ſuppoſera que les forces G, F, Π, ſoient parallèles ; c'eſt-à-dire, que le moment de la force F par rapport à CD, par exemple, ſera égal au moment de la force Π, par rapport à la même ligne CD; &c. & ainſi du reſte.

Donc ſi on a tant de forces qu'on voudra π', g', f', dont les unes ſoient parallèles à CE', les autres à CD, les autres à CB, leſquelles ſe faſſent équilibre ; il faudra 1°. que la ſomme de ces trois ſyſtêmes de forces, chacun pris en particulier, ſoit $= o$; équations qui n'auront lieu que dans le cas où le point C eſt entiérement libre ; 2°. que la ſomme des momens des forces f' par rapport à l'axe CD, ſoit égale à la ſomme des momens des forces π' par rapport à ce même axe ; 3°. que la ſomme des momens des forces g' par rapport à CB, ſoit égale à la ſomme des momens des forces π' par rapport à ce même axe ; 4°. enfin que la ſomme des momens des forces f' par rapport à CE', ſoit égale à la ſomme des momens des forces g' par rapport à ce même axe. On ſe ſouviendra que le moment d'une force par rapport à un axe, ſe prend par le produit de cette force & d'une perpendiculaire tombant de cet axe ſur la direction de cette force.

VIII.

Appliquons maintenant ces principes au Problême dont il s'agit ; & ſuppoſons (*fig.* 18.) que le corps en

mouvement soit sollicité par trois forces, dont l'une Ψ soit parallèle à CE', la seconde γ parallèle à CD, la troisiéme φ parallèle à CB ; & soient nommées

Les distances de la force Ψ à CB & CD .... ν' & μ' ;

Les distances de la force γ à CB & CE' ... ξ' & χ' ;

Les distances de la force φ à CE' & CD ... θ' & ζ' ;

Il est évident que les forces Ψ, γ, φ doivent être en équilibre avec celles qu'on a trouvées ci-dessus, & qui doivent être détruites dans le mouvement du corps ; donc nommant G chaque particule du corps, on aura

$$1^{\circ}. \int \frac{(-ddq - d\,d\pi)\, p\,\theta^2\, G}{2\,a\,d\,t^2} + \Psi = 0.$$

$$2^{\circ}. \int \frac{(-dds - d\,d^2u)\, p\,\theta^2\, G}{2\,a\,d\,t^2} + \gamma = 0.$$

$$3^{\circ}. \int \frac{(-ddx - d\,dz)\, p\,\theta^2\, G}{2\,a\,d\,t^2} + \varphi = 0.$$

$$4^{\circ}. \int \frac{G(-d\,d\,q - d\,d\,\pi)\, p\,\theta^2\, u}{2\,a\,d\,t^2} + \Psi\,\nu' - \frac{G(-d\,d\,s - d\,d\,u)\, p\,\theta^2\,\pi}{2\,a\,d\,t^2} - \gamma\,\xi' = 0.$$

$$5^{\circ}. \int \frac{G(-d\,d\,s - d\,d^2u)\, p\,\theta^2\, z}{2\,a\,d\,t^2} + \gamma\,\chi' - \int \frac{G(-d\,d\,x - d\,d\,z)\, p\,\theta^2\, u}{2\,a\,d\,t^2} - \varphi\,\theta' = 0.$$

$$6^{\circ}. \int \frac{G(-d\,d\,q - d\,d^2\pi)\, p\,\theta^2\, z}{2\,a\,d\,t^2} + \Psi\,\mu' - \int \frac{G(-d\,d\,x - d\,d\,z)\, p\,\theta^2\,\pi}{2\,a\,d\,t^2} - \varphi\,\zeta' = 0.$$

Ces six équations donneront le mouvement du corps.

Pour avoir l'intégrale de $G\,dd\pi + G\,ddq$, & celle $G\,(-ddq - dd\pi).u$, il faut d'abord prendre les différences premiere & seconde de π, en faisant varier seulement e, y, & P, ensuite prendre l'intégrale en ne faisant varier que f, ξ, & b. Il en est de même des autres.

On peut simplifier les trois premieres équations, en remarquant que par la propriété du centre de gravité, on a $\int G\,(a - b) = o$, $\int G f \text{sin.}\,\xi = o$, $\int G f \text{cos.}\,\xi = o$. Car après la substitution des valeurs de π, u, z, dans ces équations, effaçant les termes qui seront multipliés par quelqu'une des trois quantités qu'on vient de trouver égales à zero, on réduira les trois premieres équations aux trois suivantes ;

$$\int \frac{-G\,p\,\theta^2\,ddq}{2\,a\,dt^2} + \Psi = o \ldots\ldots\ldots\ldots (F)$$

$$\int \frac{-G\,dds.p\,\theta^2}{2\,a\,dt^2} + \gamma = o \ldots\ldots\ldots\ldots (G)$$

$$\int \frac{-G\,ddx.p\,\theta^2}{2\,a\,dt^2} + \varphi = o \ldots\ldots\ldots\ldots (H)$$

Par la même raison on simplifiera les trois autres ; en considérant que $\int G.\,u = o$, $\int G.\,\pi = o$; &c. & par conséquent $ddq \int G.\,u = o$; $ddx \int G.\,\pi = o$ &c. Donc on aura

$$\int \frac{-dd\pi.p\,\theta^2\,u\,G}{2\,a\,dt^2} + \Psi\,r' - \int \frac{-ddu.p\,\theta^2\,\pi\,G}{2\,a\,dt^2}$$

$$+ \chi\,\xi' = o \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (L)$$

$$\int \frac{-ddu \cdot p\theta^2 Gz}{2adt^2} + \gamma\chi' - \int \frac{-dd\zeta \cdot p\theta^2 Gu}{2adt^2} - \varphi\theta' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (M)$$

$$\int \frac{-dd\pi \cdot p\theta^2 Gz}{2adt^2} + \Psi\mu' - \int \frac{G.-dd\zeta \cdot p\theta^2 \pi}{2adt^2} - \varphi\zeta' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (N)$$

On peut remarquer dans ces équations, que $\pi\, d\,du - u\, d\,d\pi$ eſt $= d(\pi\, du - u\, d\pi)$; que de même $u\, d\,d\zeta - \zeta\, d\,du$, eſt la différence de $u\, d\,\zeta - \zeta\, du$; & qu'enfin $\pi\, d\,d\zeta - \zeta\, d\,d\pi$ eſt celle $\pi\, d\zeta - \zeta\, d\,\pi$; ce qui pourra ſervir à abréger le calcul dans pluſieurs occaſions.

Par exemple, ſi $\Psi, \gamma', \gamma\, \xi'$ &c. & les autres quantités analogues ne dépendoient point des variables π, ζ, u, on pourroit intégrer les équations précédentes en les réduiſant aux différences premières.

IX.

Suppoſons que le corps ne faſſe que de très-petites oſcillations dans tous les ſens, le calcul des équations devient beaucoup plus ſimple. Car alors on peut ſuppoſer de plus que l'axe Cp, qui a été pris arbitrairement, ne faſſe qu'un très-petit angle Π' avec Ce; & on aura $\sqrt{1 - yy} = \Pi'$ en négligeant les quantités infiniment petites du ſecond ordre; $y = 1$; cof. $P = 1$, cof. $e = 1$, ſin. $P = P$, ſin. $e = e$; donc on aura en négligeant les termes où Π', P, e, ſe trouveroient enſemble;

$$\pi = (a - b)\,\Pi' + f \text{ cof. } \xi - fP \text{ ſin. } \xi$$
$$u = a - b - f \text{ cof. } \xi.\,\Pi' + fe \text{ ſin. } \xi$$
$$\zeta = f \text{ ſin. } \xi + fP \text{ cof. } \xi - (a - b)e;$$

Donc nommant π l'angle que l'axe Cp (*figure* 15.) parcourt en s'approchant de Ce, & faisant attention que $d\pi = -d\Pi'$ & $dd\Pi' = -dd\pi$, on aura

$$dd\varpi = -(a-b)\,dd\pi - f\sin.\xi\,ddP;$$
$$ddu = +dd\pi \cdot f\cos.\xi + f\,dde\sin.\xi;$$
$$ddz = +f\,ddP\cos.\xi - (q-b)\,dde;$$

Donc en négligeant ce qu'on doit négliger (c'est-à-dire les quantités dP^2, $P\,ddP$, $\Pi\,dd\pi$ &c. qui sont censées nulles par rapport à ddP, $dd\pi$, &c. lorsque P, π, &c. sont supposés excessivement petites, comme on le suppose ici), les trois équations L, M, N, deviendront les trois suivantes ;

$$\frac{p\theta^2\,dd\pi}{2adt^2}\int G(a-b)^2 + \frac{p\theta^2\,ddP}{2adt^2}\int G\cdot f(a-b)\sin.\xi + \Psi\gamma' = -\frac{p\theta^2\,dd\pi}{2adt^2}\int Gff\cos.\xi^2 + \frac{dde\cdot p\theta^2}{2adt^2}\int Gff\sin.\xi\cos.\xi + \gamma\xi' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (P)$$

$$-\frac{dd\pi\cdot p\theta^2}{2adt^2}\int Gff\sin.\xi\cos.\xi - \frac{dde\cdot p\theta^2}{2adt^2}\int Gff\sin.\xi^2 + \gamma\chi' = -\frac{ddP\cdot p\theta^2}{2adt^2}\int Gf(a-b)\cos.\xi + \frac{dde\cdot p\theta^2}{2adt^2}\int G(a-b)^2 + \varphi\theta'' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (R)$$

$$\frac{dd\pi\cdot p\theta^2}{2adt^2}\int G(a-b)f\sin.\xi + \frac{ddP\cdot p\theta^2}{2adt^2}\int Gff\sin.\xi^2 + \Psi\mu' = -\frac{ddP\cdot p\theta^2}{2adt^2}\int Gff\cos.\xi^2 + \frac{dde\cdot p\theta^2}{2adt^2}\int G(a-b)f\cos.\xi + \varphi\zeta' \quad \ldots\ldots \quad (S)$$

X.

Si l'axe Cp paſſe, ou exactement, ou à-peu-près, par le centre de gravité de chacune des coupes $KC'H$ perpendiculaires à cet axe, on aura (en prenant G' pour les ſeules particules placées dans la coupe $KC'H$) $\int G'f$ ſin. $\xi = o$, & $\int G'f$ coſ. $\xi = o$; & par conſéquent on aura pour chaque coupe $KC'H$, $\int G'f\,(a-b)$ ſin. $\xi = o$, & $\int G'f\,(a-b)$ coſ. $\xi = o$. Donc auſſi $\int Gf\,(a-b)$ ſin. $\xi = o$, & $\int Gf\,(a-b)$ coſ. $\xi = o$. En ce cas les équations précédentes ſe ſimplifieront beaucoup.

Il en ſeroit de même, ſi une ligne menée par le point C, perpendiculairement à Cp, & parallèlement au plan $ZCez$, lorſque $\epsilon = o$, paſſoit, ou exactement, ou à-peu-près, par les centres de gravité de toutes les coupes du ſolide auxquelles cette ligne ſeroit perpendiculaire; car alors on auroit $\int G'(a-b) = o$, $\int G'f$ coſ. $\xi = o$; & par conſéquent $\int G(a-b)f$ ſin. $\xi = o$, & $\int Gf$ coſ. $\xi . f$ ſin. $\xi = o$.

Enfin il en ſeroit de même encore, ſi la perpendiculaire à Cp, menée dans le plan $E'Ce$, lorſque $\epsilon = o$, paſſoit, ou exactement, ou à-peu-près, par le centre de gravité de chacune des coupes du ſolide, auxquelles elle ſeroit perpendiculaire. Car alors on auroit $\int Gf$ coſ. $\xi\,(a-b) = o$, $\int Gf^2$ ſin. ξ coſ. $\xi = o$.

Il eſt à remarquer encore, que ſi le plan paſſant par l'axe Cp, & perpendiculaire au plan $ZCez$, lorſque $\epsilon = o$, diviſe, ou exactement, ou à-peu-près, le ſolide en deux portions égales & ſemblables, on aura les deux équations

$$\int G f^2 \text{ sin. } \xi \text{ cos. } \xi = o$$
$$\int G f \text{ sin. } \xi (a-b) = o.$$

XI.

Dans le cas de $\int G f \text{ sin. } \xi (a-b) = o$, de $\int G f^2 \text{ sin. } \xi \text{ cos. } \xi = o$, & de $\int G f (a-b) \text{ cos. } \xi = o$, on aura les équations

$$\frac{p\theta^2}{2adt^2} \times [dd\eta \int G (a-b)^2 + dd\eta \times \int G f f \text{ cos. } \xi^2]$$
$$+ \Psi \eta' - \gamma \xi' = o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (T)$$
$$\frac{p\theta^2}{2adt^2} \times [-dd\xi \int G f f \text{ sin. } \xi^2 - dd\xi \times \int G (a-b)^2]$$
$$+ \gamma \chi' - \varphi \theta' = o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (V)$$
$$\frac{p\theta^2}{2adt^2} \times dd P \int G f f + \Psi \mu' - \varphi \zeta' = o \ldots\ldots (X)$$

A l'égard des équations (F), (G), (H), elles ne reçoivent aucun changement.

Le cas dont il s'agit ici, eſt celui d'un ſolide de révolution, ou à-peu-près tel, animé par trois forces quelconques Ψ, γ, φ.

XII.

Il peut être quelquefois plus commode de rapporter le mouvement du corps, non aux lignes fixes CD, CB, mais aux lignes mobiles Ce, $C\zeta$ (*fig.* 16.); en ce cas on prendra les formules (A) de l'Art. IV. & après avoir trouvé en conſéquence les valeurs de ζ & de u, on mettra ſimplement e au lieu de ſin. e, à cauſe que e eſt très-petit; & au lieu de cos. e, on mettra $1 - \frac{e^2}{2}$.

On

On différentiera enſuite, pour avoir les valeurs de ddz & ddu; & laiſſant ſubſiſter les quantités dde, de^2, dans la différentielle du ſecond ordre qui en viendra, on effacera les termes où la quantité e ſe rencontre encore; parce que ces termes ſont nuls ou cenſés tels; e étant ici (*hyp*) une quantité infiniment petite. De plus, ſi dans cette différentielle on met $-de$ & $-dde$ pour de & dde, en prenant de pour l'angle que parcourt la ligne Ce de e vers Z (lequel angle eſt égal à $-de$), on aura préciſément les formules qui ont été trouvées dans nos *Recherches ſur la préceſſion des Equinoxes*, Art. 43; ſavoir;

$$-ddu = -f\,\text{cof. } X \cdot d\left(\frac{y\,dy}{\sqrt{1-yy}}\right) + \frac{2f\,dP\,\text{ſin. } X \cdot y\,dy}{\sqrt{1-yy}} - ddy\,(a-b) - f\,dde\,\text{ſin. } X - 2f\,de\,dP\,\text{cof. } X - f\,d\,de\,P\,\text{ſin. } X \cdot \sqrt{1-yy} - f\,dP^2 \times \text{cof. } X\sqrt{1-yy} + y\,de^2\,(a-b) - f\,de^2\,\text{cof. } X \cdot \sqrt{1-yy};$$

$$-d\,dz = \frac{2f\,de \cdot y\,dy\,\text{cof. } X}{\sqrt{1-yy}} + 2\,de\,dy\,(a-b) + 2f\,de\,dP \times \text{ſin. } X\sqrt{1-yy} + y\,dde\,(a-b) - f\,dde\,\text{cof. } X\sqrt{1-yy} - f\,d\,dP\,\text{cof. } X + f\,dP^2\,\text{ſin. } X;$$

Enfin $-dd\pi = -f\,dd\,y\,\text{cof. } X + 2f\,dy\,dP\,\text{ſin. } X + fy\,dd\,P\,\text{ſin. } X + (a-b)\,d\left(\frac{y\,dy}{\sqrt{1-yy}}\right) + fy\,dP^2\,\text{cof. } X.$

De plus on mettra dans ces différentielles à la place de cos. X, sa valeur cos. $\xi + P$ = cos. ξ . cos. P — sin. ξ . sin. P ; & à la place de sin. X, sa valeur sin. $\xi + P$ = sin. ξ cos. P + sin. P cos. ξ.

Enfin dans les équations L, M, N, on mettra au lieu de π, u, z leurs valeurs trouvées dans l'Art. IV, mais simplifiées, en supposant cos. $e = 1$ & sin. $e = 0$, ce qui donnera

$u = (a - b)\gamma - f$ cos. ξ cos. $P\sqrt{1 - \gamma\gamma} + f$ sin. ξ sin. $P\sqrt{1 - \gamma\gamma}$;

$z = f$ sin. ξ cos. $P + f$ sin. P cos. ξ ;

Et $\pi =$ comme dans le cas général, $(a - b)\sqrt{1 - \gamma\gamma} + f\gamma$ cos. ξ cos. $P - f\gamma$ sin. ξ sin. P.

Dans ce cas il faudra supposer que les puissances Ψ, γ, Φ soient parallèles aux lignes CE', Ce, Cz, pour rendre le calcul plus facile.

XIII.

Dans le cas où le corps ne fait que de très-petites oscillations, si l'axe Cp du corps étoit supposé dans une situation telle, que l'angle initial pCD (*fig.* 18.) ne fût pas fort petit ; alors au lieu de γ, on pourroit mettre cos. $K - n$, ou cos. $K + n$ sin K, K exprimant l'angle initial pCD ; & au lieu de $\sqrt{1 - \gamma\gamma}$, on mettroit de même sin. $K - n$ cos. K ; d'où il est aisé de voir les changemens qui en résulteroient dans les valeurs de u, z, π, ainsi que dans celles de ddu, ddz, $dd\pi$.

XIV.

Lorſque les oſcillations ſont fort petites, il eſt aiſé de voir que ſi on rapporte la puiſſance Ψ perpendiculaire au plan $Z\,e\,z$, aux lignes Cz, Ce (*fig.* 16.), on aura, au lieu de $\Psi\mu'$, la quantité $\Psi\mu' - \Psi e\nu'$, & au lieu de $\Psi\nu'$, $\Psi\nu' + \Psi e\mu'$; d'où l'on voit que ſi μ' & ν' ſont l'une & l'autre fort petites, on pourra ſuppoſer les quantités $\Psi\mu'$ & $\Psi\nu'$ rapportées indifféremment, la premiere à Ce ou CD, la ſeconde à CB ou Cz, parce que e étant fort petit, $e\nu'$, & $e\mu'$ ſont nuls par rapport à μ' & à ν'. Il en ſera de même des autres puiſſances γ, φ, à proportion, & *mutatis mutandis*.

XV.

De plus, lorſque les oſcillations du corps ſont fort petites, il eſt encore aiſé de voir que ddt, ddP, & $dd\pi$ ſont incomparablement plus grands que dt^2, dP^2, $d\pi^2$, & que $dt\,dP$, $dt\,d\pi$, $dP\,d\pi$. C'eſt pourquoi on pourra effacer ces dernieres quantités dans les valeurs trouvées ci-deſſus, Art. XII, pour $dd\alpha$, $dd\zeta$, $dd\varpi$, en ſe reſſouvenant que $d\pi = \frac{dy}{\sqrt{1-yy}}$, que $y = \text{cof. } K + \pi$ ſin. K; & que $\sqrt{1-yy} = \text{ſin. } K - \pi$ cof. K; ce qui donnera (en faiſant K très-petit) les mêmes équations qu'on a trouvées dans l'Art. IX. ci-deſſus, en ſuppoſant que les puiſſances Ψ, γ, φ, puiſſent être indifféremment rapportées aux lignes Ce, Cz, ou CD, CB.

Du reſte il eſt toujours aiſé de voir par les Elémens de Géométrie, les changemens qu'il faut faire aux quantités $\Psi\mu'$, $\Psi\nu'$, &c. pour rapporter les puiſſances ψ, γ, φ, aux lignes de poſition variable Ce, Cz, c'eſt-à-dire, pour les changer en d'autres qui ſoient parallèles à CE', Ce, Cz.

XVI.

Pour trouver la loi des forces ψ, γ, φ, lorſque le corps eſt ſuppoſé tourner autour d'un axe fixe, ſoit que cet axe ſe meuve d'ailleurs ou non, d'un mouvement parallèle à lui-même; on ſuppoſera que Cp ſoit cet axe, & ſe confonde avec Ce; ce qui eſt permis, puiſque Cp a été pris arbitrairement au-dedans du corps, & que la poſition du plan fixe $Ze\zeta$ eſt auſſi arbitraire; & l'on aura $\gamma = 1$, $\sqrt{1-\gamma\gamma} = 0$, $e = 0$, ſin. $e = 0$, cof. $e = 1$; donc $\pi = f$ cof. $\xi + P = f$ cof. ξ cof. P $- f$ ſin. ξ ſin. P;

$u = a - b$, & par conſéquent du & $ddu = 0$;

$\zeta = f$ ſin. $\xi + P = f$ ſin. ξ cof. $P + f$ ſin. P cof. ξ;

D'où l'on tirera facilement les valeurs de $d\,d\zeta$ & $dd\pi$ en ne faiſant varier que P; & par conſéquent la loi du mouvement du corps, en mettant ces valeurs dans les ſix premieres équations du §. VIII. De plus, ſi on ſuppoſe que l'axe Cp n'ait aucun mouvement de tranſport, on aura $dq = 0$, $ds = 0$, $dx = 0$. C'eſt pourquoi on aura d'abord en général,

$$- \frac{p\theta^2\,d\,dq}{2a\,d\xi^2} \int G - dd\,\frac{(\text{cof. } P)\cdot p\theta^2}{2a\,d\xi^2} \times \int\int G \text{ cof. } \xi$$

$$+ dd\frac{(\text{fin. } P).p\,\theta^2}{2adt^2}\times ffG\text{ fin. }\xi + \Psi = o \ldots (\alpha)$$

$$- \frac{p\,\theta^2\,dd\,s}{2adt^2} fG + \gamma = \sigma. \ldots\ldots (\zeta)$$

$$- \frac{p\,\theta^2\,dd\,x}{2adt^2} fG - dd\frac{(\text{cof. } P)\,p\,\theta^2}{2adt^2}\times ffG\text{ fin. }\xi$$

$$- dd\frac{(\text{fin. } P).p\,\theta^2}{2adt^2}\times ffG\text{ cof. }\xi + \varphi = o \ldots (\gamma)$$

$$- \frac{dd\,q.p\,\theta^2}{2adt^2} fG(a-b) - dd(\text{cof. } P)\times\frac{p\,\theta^2}{2adt^2}$$

$$\times fGf\text{cof. }\xi\,(x-b) + dd\frac{(\text{fin. } P).p\,\theta^2}{2adt^2} ff(x-b)$$

$$\text{fin. }\xi.G + \Psi\,\nu' = -\frac{dd\,s.p\,\theta^2.\text{cof. } P}{2adt^2}\times ff\text{ cof. }\xi.G$$

$$+ \frac{dd\,s.p\,\theta^2}{2adt^2}\text{ fin. } P\times ff\text{ fin. }\xi.G + \gamma\,\xi' \ldots\ldots (\delta)$$

$$- \frac{p\,\theta^2\,dd\,s}{2adt^2}\text{ cof. } P\,ffG\text{ fin. }\xi - \frac{p\,\theta^2\,dd\,s}{2adt^2}\text{ fin. } P\,ffG$$

$$\text{cof. }\xi + \gamma\,\chi' = -\frac{p\,\theta^2\,dd\,x}{2adt^2} fG(x-b) - \frac{p\,\theta^2}{2adt^2}$$

$$dd\text{ cof. } P\,ffG\text{ fin. }\xi(x-b) - \frac{p\,\theta^2}{2adt^2} dd\text{ fin. } P\,ffG$$

$$(x-b)\text{ cof. }\xi + \varphi\,\theta' = o \ldots\ldots (\varepsilon)$$

$$\text{Enfin } - \frac{dd\,q.p\,\theta^2}{2adt^2}\text{ cof. } P\,ffG\text{ fin. }\xi - \frac{dd\,q.p\,\theta^2}{2adt^2}$$

$$\text{fin. } P\,ffG\text{ cof. }\xi - \frac{p\,\theta^2}{adt^2} dd(\text{cof. } P)\text{ fin. } P\times fffG$$

$$+ \frac{p\,\theta^2}{adt^2} dd(\text{fin. } P)\text{ cof. } P\times fGff + \Psi\,\mu' = -$$

$$\frac{p\,\theta^2}{2adt^2} dd\,x\times\text{cof. } P\,ffG\text{ cof. }\xi + \frac{p\,\theta^2\,dd\,x}{2adt^2}$$

$$\times\text{fin. } P\,ffG\text{ fin. }\xi + \Psi\,\zeta' \ldots\ldots (\vartheta)$$

Suppoſons maintenant que le point C ſoit fixement attaché, & que par conſéquent $dx = o, dq = o, ds = o$. Suppoſons de plus que le corps tourne autour de ſon axe; & que les puiſſances $\Upsilon, \gamma, \varphi$, ſoient $= o$; ou aura les équations ſuivantes

dd cof. $P \int f G$ cof. $\xi - dd$ ſin. $P \int f G$ ſin. $\xi = o$

dd cof. $P \int f G$ ſin. $\xi + dd$ ſin. $P \times \int f G$ cof. $\xi = o$

dd cof. $P \int f G$ cof. $\xi (a - b) - dd$ ſin. $P \int f G$ ſin. $\xi (a - b) = o$

dd cof. $P \int f G$ ſin. $\xi (a - b) + dd$ ſin. $P \int f G$ cof. $\xi (a - b) = o$

dd cof. P ſin. $P - dd$ ſin. P cof. $P = o$.

La derniere de ces équations donne $ddP = o$; d'où il s'enſuit que le mouvement de rotation eſt uniforme.

Les autres équations ne renfermant que la variable P, chacun de leurs termes en particulier doit être $= o$. ainſi ces équations donnent;

1°. $\int f G$ cof. $\xi = o$, $\int f G$ ſin. $\xi = o$; d'où il s'enſuit que l'axe de rotation paſſe par le centre de gravité du corps;

2°. $\int f G$ ſin. $\xi (a - b) = o$; $\int f G$ cof. $\xi (a - b) = o$.

Ainſi, quand même l'axe de rotation paſſeroit par le centre de gravité du corps, ſi ces deux dernieres équations n'ont pas lieu, il eſt impoſſible que l'axe de rotation ſoit une ligne fixe & invariable, comme on le ſuppoſe. On ne doit donc point ſuppoſer qu'un corps *quelconque* tourne uniformément autour d'un axe *quelconque*.

XVII.

Pour trouver en général l'axe autour duquel le corps tourne à chaque inſtant, ſoit que cet axe change de poſition ou non, on fera $d\pi + d'q = o$, $ds + d'u = o$, $dx + d'z = o$; & en ſubſtituant les valeurs de cette quantité, on trouvera dans chaque tranche perpendiculaire à Cp, le point qui ſera en repos; ce point ſe déterminera par les valeurs de f ſin. X & de f coſ. X, que donnera la réſolution des équations. Mais on peut en venir plus ſimplement à bout de la maniere ſuivante.

On conſidérera d'abord que toute la difficulté ſe réduit à trouver les points immobiles, dans la ſuppoſition que le point C (pris à volonté dans le corps) n'ait aucun mouvement, c'eſt-à-dire, que l'on ait $q = o$, $s = o$, $x = o$, & par conſéquent auſſi $dq = o$, $ds = o$, $dx = o$. Car, quand il y a dans un corps une ſuite de points immobiles, ces points ne peuvent être qu'en ligne droite, comme il eſt aiſé de le prouver (*); cette ligne droite ſera donc l'axe de rotation du corps. Or cela poſé, ſi le mouvement du centre C, qui paſſe toujours par l'axe de rotation, puiſqu'on le ſuppoſe immobile, eſt perpendiculaire à cet axe; rien n'eſt plus facile que de trouver dans chacun des plans perpendiculaires à l'axe de

(*) En effet, prenons deux de ces points, & joignons-les par une ligne droite, il eſt viſible que le corps tournera autour de cette ligne; donc les autres points de cette ligne ſeront immobiles.

rotation, les points dont le mouvement eſt égal & contraire à celui du centre C; & ces points ſeront placés dans une ligne parallèle à l'axe de rotation qui paſſe par C, laquelle parallèle deviendra l'axe de rotation *réel* du corps. Dans toute autre hypothèſe, aucun des points du corps ne ſera immobile, & il n'y aura point d'axe de rotation.

Tout ſe réduit donc à chercher les points dans leſquels $d\pi = o$, $du = o$, $d\zeta = o$.

Soit $y = \text{cof. } \Pi$, $\sqrt{1 - yy} = \text{ſin. } \Pi$; on aura par les équations trouvées ci-deſſus

$\pi = (a - b) \text{ ſin. } \Pi + f \text{ cof. } X \text{ cof. } \Pi$;

$u = [(a - b) \text{ cof. } \Pi - f \text{ cof. } X \text{ ſin. } \Pi] \text{ cof. } e + f \text{ ſin. } e \text{ ſin. } X$;

$\zeta = f \text{ ſin. } X \text{ cof. } e - (a - b) \text{ ſin. } e \text{ cof. } \Pi + f \text{ cof. } X \text{ ſin. } e \text{ ſin. } \Pi$.

D'où l'on tire les trois équations

$f \text{ ſin. } X = \zeta \text{ cof. } e + u \text{ ſin. } e$

$f \text{ cof. } X = \pi \text{ cof. } \Pi - \text{ſin. } \Pi \times (u \text{ cof. } e - z \text{ ſin. } e)$

$a - b = \pi \text{ ſin. } \Pi + \text{cof. } \Pi \ (u \text{ cof. } e - z \text{ ſin. } e)$

La premiere ſe trouve en multipliant par cof. e la valeur de ζ, & par ſin. e la valeur de u, & en ajoutant enſemble les deux équations.

La ſeconde, en multipliant par cof. Π la valeur de π, par $-$ ſin. Π cof. e la valeur de u, & par $+$ ſin. Π ſin. e la valeur de ζ, & en ajoutant les trois équations.

La troiſiéme enfin ſe trouve en multipliant par ſin. Π la valeur de π, par cof. e cof. Π celle de u, & par $-$ ſin. e cof. Π

cos. Π celle de z, & en ajoutant les trois équations.

Si on différentie la troiſiéme équation en regardant $a - b$ comme conſtante, & en ſuppoſant $d\pi = o$, $du = o$, $dz = o$; on aura

$\pi d\Pi \cos.\Pi - d\Pi \sin.\Pi (u \cos.e - z \sin.e) + \cos.\Pi \times (-u de \sin.e - z de \cos.e) = o$

Différentions de même la prémiere & la ſeconde en prenant dP pour la différentielle de X, & en mettant dans les différentielles, au lieu de $f \cos.X$ ſa valeur $\pi \cos.\Pi - \sin.\Pi (u \cos.e - z \sin.e)$, & au lieu de $f \sin.X$ ſa valeur $z \cos.e + u \sin.e$; nous aurons deux autres équations différentielles, dont la ſeconde étant comparée à celle que nous venons de trouver, donnera $\frac{dP \cos.\Pi}{d\Pi} (z \cos.e + u \sin.e) = u \cos.e - z \sin.e$, équation en z & en u, qui montre que la projection de tous les points immobiles, faite ſur le plan $ZCez$, eſt une ligne droite; & ſi dans l'équation différentielle qu'on vient de trouver, on ſubſtitue à la place de u ſa valeur en z, ou à la place de z ſa valeur en u, tirée de l'équation différentielle précédente $\pi d\Pi \cos.\Pi$ &c. on aura une autre équation en π & en z, ou en π & en u, qui montrera que la projection de tous les points immobiles, faite ſur chacun des plans $E'CD$, $E'CB$, eſt auſſi une ligne droite paſſant par C; d'où il s'enſuit que tous les points immobiles ſont dans une même ligne droite paſſant par C, & qui ſera par conſéquent l'axe de rotation. Ce qui s'accorde avec ce qui a été remarqué plus haut. On trouvera la poſi-

tion de cet axe par le moyen de ſes projections ſur deux quelconques des trois plans ZCz, $E'CD$, $E'CB$.

Pour rendre le calcul plus ſimple, ſuppoſons dans les équations en z & en u, en z & en π, l'angle $e = o$, auquel cas on aura $\text{cof.}\, e = 1$, $\text{ſin.}\, e = o$; dans cette hypotheſe les projections de l'axe de rotation ſeront rapportées aux plans ZCz, $E'Ce$, $E'Cz$ (*fig.* 16.) dont les deux derniers ſont de poſition variable & donnée à chaque inſtant; on aura pour lors $\frac{z\, dP\, \text{cof.}\, \Pi}{d\Pi} = u$, &

$\pi\, d\Pi\, \text{cof.}\, \Pi - u\, d\Pi\, \text{ſin.}\, \Pi - z\, de\, \text{cof.}\, \Pi = o$. Donc

$$z\, dP\, \text{cof.}\, \Pi = u\, d\Pi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (P')$$

$\pi\, d\Pi\, \text{cof.}\, \Pi = z\, dP\, \text{cof.}\, \Pi\, .\, \text{ſin.}\, \Pi + z\, de\, \text{cof.}\, \Pi$, ou $\pi\, d\Pi - z\, dP\, \text{ſin.}\, \Pi - z\, de = o$. . . . . (Q')

$$\pi\, d\Pi\, \text{cof.}\, \Pi - u\, d\Pi\, \text{ſin.}\, \Pi - \frac{u\, d\Pi\, .\, de}{dP} = o \ldots (R')$$

XVIII.

On pourroit auſſi trouver l'axe de rotation d'une autre maniere, à-peu-près comme nous avons trouvé art. 72 de la *Preceſſion des Equinoxes*, l'axe de rotation de la Terre; pour cela on différentiera les valeurs de π, u, z, & on fera dans les différentielles $\text{cof.}\, e = 1$, & $\text{ſin.}\, e = o$; ce qui donnera

$d\pi = -f\, d\, \Pi\, \text{cof.}\, X\, \text{ſin.}\, \Pi - f\, d\, P\, \text{ſin.}\, X\, \text{cof.}\, \Pi + (a - b) \times d\, \Pi\, \text{cof.}\, \Pi$

$du = -f\, d\, \Pi\, \text{cof.}\, \Pi\, \text{cof.}\, X - (a - b)\, d\, \Pi\, \text{ſin.}\, \Pi + f\, de\, \text{ſin.}\, X + f\, d\, P\, \text{ſin.}\, \Pi\, \text{ſin.}\, X$

$dz = -de\,(a-b)$ cos. $\Pi + f\,de$ cos. X. sin. $\Pi + f\,dP$ cos. X.

Or faisant chacune de ces quantités $= o$, on aura trois équations, dont la troisiéme sera une suite nécessaire des deux premieres, ainsi que l'équation (R') est une suite nécessaire des deux équations (P'), (Q'). De plus les valeurs de $d\pi$, du, dz, supposées $= o$, donneront les mêmes équations que (P'), (Q'), (R'); comme il est aisé de s'en assurer, en mettant dans ces dernieres, au lieu de π sa valeur $(a-b)$ sin. $\Pi + f$ cos. X cos. Π, au lieu de u sa valeur $(a-b)$ cos. $\Pi - f$ cos. X. sin. Π, & au lieu de z sa valeur f sin. X.

Les valeurs de $d\pi$, du, dz, supposées égales à zero, donneront

f cos. $X = \frac{f\,de}{d\Pi}$ cos. Π sin. X, & par conséquent $\frac{\text{sin. } X}{\text{cos. } X}$ ou tang. $X = \frac{d\,\Pi}{de \text{ cos. } \Pi}$; & $\frac{a-b}{f} = \frac{\text{sin. } \Pi \text{ cos. } X}{\text{cos. } \Pi} + \frac{dP \text{ sin. } X}{d\,\Pi}$; ou, ce qui est encore plus commode. f sin. $X = \frac{(a-b)\,d\,\Pi}{dP\left(1 + \frac{de}{dP} \text{ sin. } \Pi\right)}$; & f cos. $X = \frac{(a-b)\,de \text{ cos. } \Pi}{dP\left(1 + \frac{de}{dP} \text{ sin. } \Pi\right)}$; ce qui donnera les points immobiles sur chaque plan perpendiculaire à l'axe Cp, & éloigné de C de la quantité $a-b$.

XIX.

Si on ſuppoſoit que le point C fût fixement attaché, il eſt évident que le Problême qui conſiſte à trouver le mouvement du corps, ſe réſoudroit de la même maniere, & par les mêmes méthodes. Il faut ſeulement ſe ſouvenir qu'en ce cas les trois premieres équations du §. VIII. n'auroient pas lieu ici, non plus que les équations (F), (G), (H), qui en ſont dérivées. De plus, ſi le point C n'étoit pas le centre de gravité du corps, les équations $\int G u = o$, $\int G \pi = o$, n'auroient pas lieu pour lors, & par conſéquent les équations (L), (M), (N), ſeroient un peu plus compoſées.

XX.

Si le point C, qu'on ſuppoſe n'être plus le centre de gravité, n'étoit, ni abſolument fixe, ni abſolument libre; mais que ce fût l'extrémité d'un corps pointu, comme d'un cone, qui pût ſe promener librement ſur le plan $Z e \zeta$, ſans quitter ce plan, tandis que les autres parties du corps ſeroient mues en pirouettant autour de ce point C; alors il faudroit faire quelques changemens aux formules du §. VIII.

En premier lieu, le mouvement du centre C parallèlement à CE' ſera $= o$ dans l'hypothèſe préſente; c'eſt pourquoi on aura $q = o$, & il faudra effacer dans les formules du §. VIII. tous les termes où q & ſes différences ſe rencontrent.

En second lieu, comme le point C est supposé appuyé sur le plan $Z\,e\,\zeta$, il n'est pas nécessaire que la somme des forces $\frac{p\,\theta^{1}\,G\,.\,d\,d\,q + p\,\theta^{2}\,G\,.\,d\,d\,\pi}{2\,a\,d\,t^{2}}$ ou $\frac{p\,\theta^{1}\,G\,.\,d\,d\,\pi}{2\,a\,d\,t^{2}}$ soit égale à la force Ψ ; il suffit que la résultante de ces forces, laquelle sera nécessairement perpendiculaire au plan $Z\,e\,\zeta$, passe par le point C ; c'est pourquoi, au lieu des six équations du §. VIII. on en aura cinq seulement, en supprimant la premiere, & laissant subsister les autres telles qu'elles sont ; & il ne doit pas être surprenant que les six équations se réduisent à cinq, puisque q étant $= o$ (*hyp.*) il n'y a plus que cinq indéterminées.

Si les forces qui agissent sur le corps pirouettant, se réduisent à la pesanteur, on aura $\Psi = Mp$, en appellant M la masse du corps ; & la direction de cette force passera constamment par le centre de gravité du corps. Donc si on nomme l la distance du centre de gravité au point C sur lequel le corps pirouette, on aura $\nu' = ly$ sin. $90 \mp e$ & $\mu' = l\,y$ cos. $90 \mp e$; le signe $-$ étant pour les formules (A) de l'Art. IV. & le signe $+$ pour les formules (B) ; ou, ce qui revient au même, $\nu' = l\,y$ cos. e, & $\mu' = \pm\, l\,y$ sin. e ; donc substituant ces valeurs, & effaçant dans les équations du §. VIII. les quantités q, γ & φ, après avoir supprimé en entier la premiere équation (suivant ce qui vient d'être remarqué) on aura cinq équations plus simples, qui serviront à trouver le mouvement cherché.

Si $\Psi = o$, c'est-à-dire, si le corps est supposé sans

pesanteur, les équations seront encore plus simples; car alors on aura

$$ds + du = A\,dt$$
$$dx + dz = B\,dt$$
$$M\,dt + \frac{2\,a\,t\,dt}{p\,\theta^2} = + d\,s \int G \cdot \varpi + \int G \cdot (\pi\,du - u\,d\pi)$$
$$N\,dt + \frac{2\,a\,t\,dt}{p\,\theta^2} = - d\,s \int G \cdot z + dx \int G \cdot u + \int G \cdot (u\,dz - z\,du)$$
$$P\,dt + \frac{2\,a\,t\,dt}{p\,\theta^2} = + dx \int G \cdot \pi + \int G\,(\pi\,dz - z\,d\pi).$$

Telles sont les équations par lesquelles on peut déterminer le mouvement d'un corps qui pirouette sur une de ses extrémités. Elles se déduisent, comme l'on voit, fort aisément de nos principes & de nos équations générales. Mais pour ne point trop grossir cet Ouvrage, nous n'en dirons pas davantage là-dessus, nous contentant d'avoir réduit le Problême à une simple question d'analyse.

XXI.

Ceux qui voudront voir une application importante & utile des principes exposés dans ce Mémoire, pourront avoir recours, comme je l'ai déja dit, à mes *Recherches sur la précession des Equinoxes*, publiées en 1749. Il est inconteſtable que j'ai donné le premier dans cet Ouvrage la méthode pour trouver le mouvement

d'un corps animé par des forces quelconques. Un ſavant Géometre a depuis mis au jour en 1752, dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Pruſſe pour l'année 1750, la ſolution de ce même Problême, qu'il paroît regarder comme entiérement nouvelle, quoiqu'il avoue enſuite dans le même Volume, pag. 412, que j'ai réſolu le premier le Problême de la préceſſion des Equinoxes, qui a un rapport immédiat & eſſentiel avec celui-ci. Ainſi le titre de *Découverte d'un nouveau principe de Méchanique*, que ce grand Géometre a donné à ſon Mémoire (d'ailleurs plein de recherches ſavantes & profondes), ne doit pas ſe prendre à la rigueur.

Fin du ſecond Mémoire.

TROISIÈME MÉMOIRE.

Recherches ſur les oſcillations d'un corps quelconque qui flotte ſur un fluide.

DANS mon *Eſſai d'une nouvelle théorie de la réſiſtance des fluides*, publié au commencement de 1752, j'ai donné une méthode générale pour déterminer les oſcillations d'un corps quelconque qui flotte ſur un fluide; 1°. ſoit que ces oſcillations ſoient ſimplement rectilignes, ou ſimplement curvilignes, ou rectilignes en un ſens, & curvilignes en un autre; 2°. ſoit qu'elles ſe faſſent dans un même plan, ou dans des plans qui varient à chaque inſtant; 3°. ſoit que le corps qui oſcille, ſoit diviſé ou non en deux parties égales & ſemblables par un plan vertical, paſſant par le centre de gravité du corps, & par celui de la partie ſubmergée; 4°. ſoit enfin que le fluide ſoit ſuppoſé en repos, ou en mouvement. Mais comme cette recherche ſur les oſcillations d'un corps flottant n'avoit pas un rapport direct à l'objet principal de mon *Eſſai ſur la réſiſtance des fluides*, je me contentai

contentai de donner & d'expliquer la méthode pour réſoudre le Problême généralement & dans tous les cas; & je n'entrai d'ailleurs dans aucun détail.

Depuis ce tems, le Tome XI des Mémoires de l'Académie de Peterſbourg, imprimé en 1750, m'étant tombé entre les mains, j'ai vû qu'un ſavant Géometre avoit tenté de réſoudre le même Problême, mais ſeulement pour le cas où le mouvement vertical du corps & ſon mouvement de rotation ſont ſynchrones, où ces deux mouvemens ſe font dans le même plan, & où le fluide eſt conſidéré comme en repos.

L'Auteur paroît regarder comme extrêmement difficile la ſolution générale du Problême; cette raiſon me détermine à la donner ici avec plus d'étendue que je n'ai fait dans l'Ouvrage cité, à y joindre de nouvelles remarques, des éclairciſſemens qui peuvent n'être pas inutiles; enfin, à la réſoudre d'une maniere encore plus générale, en y ajoutant de nouvelles difficultés. La ſeule ſuppoſition que je ferai, c'eſt que les oſcillations ſoient très-petites. Ce n'eſt pas que ma ſolution, ou plutôt ma méthode, ne puiſſe s'appliquer à des oſcillations quelconques; mais les équations qui en proviendroient, ſeroient ſi compliquées, qu'il ſeroit vraiſemblablement impoſſible d'en tirer aucune lumiere, ni d'arriver par ce moyen à un réſultat clair & précis.

Je commencerai par les oſcillations des figures planes ſituées verticalement, lorſque ces oſcillations ſe font dans le plan même de ces figures; je traiterai enſuite

des oscillations des corps composés de deux parties égales & semblables, lorsque ces oscillations se font dans le plan vertical qui passe par leur centre de gravité; enfin j'examinerai les oscillations d'un corps quelconque de figure irrégulière, soit qu'elles se fassent dans un même plan, ou qu'elles ne s'y fassent pas.

§. I.

Des oscillations des Figures planes.

Il est d'abord visible que tout ce que nous dirons des figures planes, s'applique de soi-même aux Cylindres qui auroient ces figures pour base, & dont l'axe seroit parallèle à la surface du fluide.

Soit donc $BODQ$ (*fig.* 19.) le corps ou le plan situé verticalement sur le fluide, BOD la partie plongée, LV l'étendue de la surface du fluide, C le centre de gravité du corps, G celui de la partie enfoncée, CT une ligne verticale, & GT une perpendiculaire à cette ligne.

Soient nommées ensuite

La pesanteur . . . . . g
Le corps $BODQ$ . . . . . M'
La partie enfoncée BOD au premier instant . . . . M
La densité du corps . . . . . Δ
Celle du fluide . . . . . δ
La surface LV du fluide . . . . . k'
La partie BA de la ligne BD . . . . . b

La partie AD . . . . . a
La distance CA du centre C à BD . . . . . e
La distance AT . . . . . f
La petite ligne GT . . . . . ζ.
L'espace que le centre C parcourt verticalement pendant le tems t . . . . . y.
L'espace que parcourt durant le même tems, en tournant de D vers O, un point quelconque placé à la distance 1 du centre C x
La somme des produits de chaque particule du corps, par le quarré de leur distance au centre de gravité, $\Delta . G$.
Enfin le tems qu'un corps pesant mettroit à tomber d'une hauteur quelconque, par exemple de la hauteur $a \ldots \theta'$.
On aura, comme je l'ai démontré, Art. 126 de l'Ouvrage cité, les deux équations suivantes, dans la seconde desquelles $R = \frac{N \delta}{\Delta M'} - 1$ (*).

$$(A) \ldots\ldots ddx = \frac{2adt^2}{\theta'^2} \times \frac{\delta}{\Delta . G} \times \left[N\zeta - \frac{y(b^2 - a^2)k'}{2(k' - a - b)} - \frac{b^3 x}{3} - \frac{a^3 x}{3} - \frac{x(bb - aa)^2}{4(k' - a - b)} + Nx(e + f) \right].$$

$$(B) \ldots\ldots ddy = \frac{2adt^2}{\theta^2} \left[R - \frac{\delta k' y (a + b)}{\Delta M' (k' - a - b)} - \frac{\delta k' x (bb - aa)}{2 \Delta . M' (k' - a - b)} \right].$$

(*) Cette quantité que j'appelle ici R, a été nommée k, Art. 123 de mon *Essai sur la résistance des fluides*; la quantité qu'on nomme ici M', a été nommée M; & la quantité θ' a été nommée θ.

Pour intégrer ces équations, je suppose d'abord $\frac{2aNC\delta}{\theta'^2\Delta.G} = M$; $\frac{a\delta k'(bb-aa)}{(k'-a-b)\Delta.G\theta^2} = \rho$; $\frac{2a\delta}{\theta'^2\Delta.G} \times \left[\frac{b^3}{3} + \frac{a^3}{3} + \frac{(bb-aa)}{4(k'-a-b)} - N(e+f)\right] = \sigma$; $\frac{2a\delta k'(a+b)}{\theta'^2.\Delta.M'(k'-a-b)} = \theta$; $-\frac{a\delta(bb-aa)k'}{\theta'^2.\Delta.M'(k'-a-b)} = \pi$; $\frac{2aR}{\theta^2} = k$; j'aurai les deux équations

$$(C) \ldots\ldots ddx = (M - \rho y - \sigma x)\,dt^2$$
$$(D) \ldots\ldots ddy = (k - \theta y + \pi x)\,dt^2$$

Pour les intégrer, suivant la méthode que j'ai donnée ailleurs, je multiplie la seconde par un coëfficient indéterminé ν, & je les ajoute ensemble; ce qui donne $ddx + \nu ddy = dt^2\,[M + k\nu + y(-\rho - \theta\nu) + x(\pi\nu - \sigma)$; je fais ensorte que $y(-\rho - \theta\nu) + x(\pi\nu - \sigma)$ soit un multiple de $\nu y + x$; ce qui donne $\frac{-\rho - \theta\nu}{\nu} = -\sigma + \pi\nu$; équation d'où l'on tirera deux valeurs de ν, que j'appelle ν & ν'; savoir

$$(E) \ldots\ldots \nu = \frac{\sigma - \theta + \sqrt{(\sigma-\theta)^2 - 4\pi\rho}}{2\pi}$$
$$(F) \ldots\ldots \nu' = \frac{\sigma - \theta - \sqrt{(\sigma-\theta)^2 - 4\pi\rho}}{2\pi}:$$

Faisant à présent $x + \nu y = u$, $x + \nu' y = u$, on aura

$$(G) \ldots\ldots ddu = [M + k\nu + (\pi\nu - \sigma)u]\,dt^2$$
$$(H) \ldots\ldots ddu' = [M + k\nu' + (\pi\nu' - \sigma)u]\,dt^2;$$

d'où l'on tire par les méthodes connues,

$$(I) \ldots\ldots u = \frac{M + k\nu}{\sigma - \pi\nu}(1 - \text{cos. } t\sqrt{\sigma - \pi\nu})$$

$$(K) \ldots\ldots u' = \frac{M + k v'}{\sigma - \pi v'} (1 - \text{cos.}\, t\sqrt{\sigma - \pi v'});$$

& les deux équations $x + v y = u$, $x + v' y = u'$, donneront

$$(L) \ldots\ldots y = \frac{u - u'}{v - v'}$$

$$(M) \ldots\ldots x = \frac{v' u - v u'}{v' - v};$$

ainſi le Problême eſt reſolu.

COROLLAIRE I.

Suppoſons d'abord que les deux valeurs de v ſoient finies, réelles & inégales; il faut en ce cas, pour que la ſolution précédente ſoit bonne, que $\sigma - \pi v$ & $\sigma - \pi v'$ ſoient toutes deux des quantités poſitives, ou au moins ne ſoient pas négatives. Sans cela $\sqrt{\sigma - \pi v}$, ou $\sqrt{\sigma - \pi v'}$, ou l'une & l'autre quantité ſeroient imaginaires; alors les quantités cof. $t\sqrt{\sigma - \pi v}$, & cof. $t\sqrt{\sigma - \pi v'}$ ſeroient, ſuivant l'expreſſion connue des coſinus,

$$\frac{c^{\sqrt{(\pi v - \sigma)}\, t} + c^{-\sqrt{(\pi v - \sigma)}\, t}}{2};$$

& $$\frac{c^{t\sqrt{\pi v' - \sigma}} + c^{-t\sqrt{\pi v' - \sigma}}}{2};$$

quantités qui ne renferment point d'imaginaires, ou dont l'une au moins n'en renferme pas, & qui croiſſent en même-tems que t; d'où l'on voit que dans ce cas les oſcillations du corps ne ſeroient pas infiniment petites, ce qui eſt contre l'hypothèſe.

Ainſi, lorſque ν' & ν ſont toutes deux finies, réelles & inégales, il faut que $\sigma - \pi\nu > 0$ & $\sigma - \pi\nu' > 0$, pour que les oſcillations du corps ſoient infiniment petites; mettant donc à la place de ν & de ν' leurs valeurs tirées des équations (E) & (F), on aura pour le cas dont il s'agit, $\sigma + \theta > + \sqrt{(\theta - \sigma)^2 - 4\pi\rho}$, & $\sigma + \theta > - \sqrt{(\theta - \sigma)^2 - 4\pi\rho}$; par conſéquent il faut, 1°. que $\theta\sigma > -\pi\rho$; 2°. que $\sigma + \theta$ ſoit poſitif; 3°. que $(\theta - \sigma)^2$ ſoit plus grand que $4\pi\rho$, puiſqu'on ſuppoſe ici que les racines ne ſont point imaginaires. Donc ſuppoſant Ω, ω, ϖ des quantités poſitives quelconques, il faut que $\sigma + \theta = \Omega$; $\theta\sigma - \omega = -\pi\rho$; $(\theta - \sigma)^2 = 4\pi\rho + \varpi$.

COROLLAIRE II.

Lorſqu'un corps eſt en équilibre ſur un fluide, & qu'on le déplace un peu de cet état, on peut voir par les calculs précédens, ſi l'état d'équilibre étoit *ferme*, comme l'appelle M. Daniel Bernoulli, c'eſt-à-dire, ſi le corps reviendra de lui-même à cet état. Car il n'y a qu'à examiner ſi les oſcillations du corps doivent être très-petites, ou ſi elles ne le ſeront pas. Dans le premier cas le corps reviendra, ou tendra à revenir à ſon premier état; dans le ſecond il culbutera. V. l'Ouvrage cité, Art. 125, & le *Traité de Dyn.* Art. 147. ſeconde Edit.

COROLLAIRE III.

Suppoſons à préſent que les valeurs de ν & ν' ſoient

imaginaires, enſorte que $\nu = A + B\sqrt{-1}$, & $\nu' = A - B\sqrt{-1}$; ſubſtituant ces valeurs, & faiſant

$M + kA \ldots = \delta$

$kB \ldots = \varepsilon$

$\sigma - \pi A \ldots = \varphi$

$-\pi B \ldots = \gamma$

$\sqrt{\sigma - \pi A - \pi B\sqrt{-1}}$, ou, ce qui revient au même,

$\sqrt{\varphi + \gamma\sqrt{-1}} = \ldots\ldots\ldots\ldots \alpha + \zeta\sqrt{-1}$ (*),

on aura d'abord

$$x = \frac{\delta + \varepsilon\sqrt{-1}}{\varphi + \gamma\sqrt{-1}} \times [1 - \text{cof.}\, t\,(\alpha + \zeta\sqrt{-1})];$$

or cof. $t(\alpha + \zeta\sqrt{-1}) =$ par les formules connues cof. αt. cof. $t\zeta\sqrt{-1}$ — ſin. αt. ſin. $t\zeta\sqrt{-1}$; de plus,

$$\text{cof.}\, t\,\zeta\sqrt{-1} = \frac{e^{-\zeta t} + e^{+\zeta t}}{2}, \text{ \& ſin. } t\zeta\sqrt{-1} = \frac{e^{-\zeta t} - e^{+\zeta t}}{2\sqrt{-1}};$$

donc multipliant par $\varphi - \gamma\sqrt{-1}$, le haut & le bas de la valeur de x, on aura

$$x = [\delta\varphi + \varepsilon\gamma + (\varepsilon\varphi - \gamma\delta)\sqrt{-1}] \times \left[1 - \text{cof.}\, \alpha t \left(\frac{e^{\zeta t} + e^{-\zeta t}}{2}\right) + \frac{\text{ſin. } \alpha t\,(e^{\zeta t} - e^{-\zeta t})}{2\sqrt{-1}}\right]$$ divi-

ſé par $\varphi\varphi + \gamma\gamma$; & on aura de même

$x' = [\delta\varphi + \varepsilon\gamma + (\delta\gamma - \varepsilon\varphi)\sqrt{-1}] \times [1 - \text{cof.}\, \alpha t$

(*) Les quantités α & ζ ſe trouveront par la méthode que j'ai donnée dans les Mémoires de Berlin 1746.

$\left(\frac{c^{\zeta t}+c^{-\zeta t}}{2}\right) - \text{sin. } \alpha t \left(\frac{c^{\zeta t}-c^{-\zeta t}}{2\sqrt{-1}}\right)\Big]$

divisé par $\varphi\varphi+\gamma\gamma$; donc

$$y = \frac{\iota\varphi-\gamma\delta}{B(\varphi\varphi+\gamma\gamma)} \times \left[1 - \text{cos. } \alpha t \left(\frac{c^{\zeta t}+c^{-\zeta t}}{2}\right)\right]$$

$$+ \frac{+\delta\varphi+\iota\gamma}{-B(\varphi\varphi+\gamma\gamma)} \text{sin. } \alpha t \left(\frac{c^{\zeta t}-c^{-\zeta t}}{2}\right);$$

$$\& x = \left[\frac{(\iota\varphi-\gamma\delta)A-B(\delta\varphi+\iota\gamma)}{-B(\varphi\varphi+\gamma\gamma)}\right] \times \left[1 - \text{cos. } \alpha t \right.$$

$$\left. \frac{(c^{\zeta t}+c^{-\zeta t})}{2}\right] + \left[\frac{(\delta\varphi+\iota\gamma)A+(\iota\varphi-\gamma\delta)B}{B(\varphi\varphi+\gamma\gamma)}\right]$$

$$\times \text{sin. } \alpha t \left(\frac{c^{\zeta t}-c^{-\zeta t}}{2}\right).$$

COROLLAIRE IV.

Il eſt viſible que dans ce cas les valeurs de y & de x ne ſont plus très-petites, puiſque $c^{\zeta t}$ croît à meſure que t croît; ainſi, 1°. la ſolution n'eſt pas bonne dans le cas où les deux valeurs de ν ſont imaginaires; 2°. dans ce même cas, l'état d'équilibre d'où le corps a été dérangé, n'étoit pas un état d'équilibre ferme, & le corps doit culbuter.

COROLLAIRE V.

Si $\pi = o$, la valeur de ν devient infinie, & celle de $y' = \frac{o}{o}$. Pour trouver ce qui doit arriver dans ce

ce cas-là, ſuppoſons π infiniment petite, nous aurons $\sqrt{(\sigma-\theta)^2-4\pi\rho} = \sigma-\theta-\frac{2\pi\rho}{\sigma-\theta}$; d'où $\nu = \frac{\sigma-\theta}{\pi}$; $\nu' = \frac{\rho}{\sigma-\theta}$: donc

$u = \frac{k\sigma}{\theta}(1-\text{cof. } t\sqrt{\theta})$, en négligeant la quantité M qui eſt nulle par rapport à la quantité infinie k;

$u' = \frac{M+\frac{k\rho}{\sigma-\theta}}{\sigma}(1-\text{cof. } t\sqrt{\sigma})$; donc y, ou $\frac{u}{\nu} = \frac{k}{\theta}(1-\text{cof. } t\sqrt{\theta})$; & $x = \frac{\nu' u - \nu u'}{\nu'-\nu} = \frac{\frac{\nu' u}{\nu} - u'}{\frac{\nu'}{\nu}-1} = u' - \frac{\nu' u}{\nu} = \frac{M+\frac{k\rho}{\sigma-\theta}}{\sigma}(1-\text{cof. } t\sqrt{\sigma}) - \frac{\rho k}{(\sigma-\theta)\theta}(1-\text{cof. } t\sqrt{\theta})$, qui ſe réduit à $\frac{M}{\sigma}(1-\text{cof. } t\sqrt{\sigma})$, parce que quand $\pi = o$, on a auſſi $\rho = o$. Ces deux valeurs de y & de x peuvent au reſte ſe trouver directement, en effaçant dans les équations (C) & (D) les termes ρy & πx, & en intégrant ſéparément à l'ordinaire chacune de ces équations, qui ne contient plus alors qu'une ſeule inconnue x ou y.

Dans ce cas les oſcillations ſeront fort petites, & l'état d'équilibre ſera ferme, ſi σ & θ ſont toutes deux poſitives.

COROLLAIRE VI.

Si les deux valeurs de ν & de ν' ſont égales, alors

$v - v' = a$, & $u = u'$; & les formules de x & de y ne font rien connoître; pour trouver quelle doit être alors leur valeur, je suppose que les valeurs de v différent d'une quantité infiniment petite a, ensorte que $v' = a + v$, & j'aurai $\frac{M + k v'}{\sigma - \pi v'} = \frac{M + k v}{\sigma - \pi v} + \frac{k a}{\sigma - \pi v} + \frac{\pi a (M + k v)}{(\sigma - \pi v)^2} = \frac{M + k v}{\sigma - \pi v} + \frac{k a \sigma + \pi a M}{(\sigma - \pi v)^2}$;

$\text{cos. } t\sqrt{\sigma - \pi v'} = \text{cos.} \left[t\sqrt{\sigma - \pi v} - \frac{t \pi a}{2\sqrt{\sigma - \pi v}} \right]$

$= \text{cos. } t\sqrt{\sigma - \pi v} + \frac{t \pi a}{2\sqrt{\sigma - \pi v}} \text{ sin. } t\sqrt{\sigma - \pi v}$;

donc mettant pour v' sa valeur $a + v$, & pour u' sa valeur résultante des expressions qu'on vient de trouver, on aura $y = \frac{M + k v}{a(\sigma - \pi v)} \times \frac{t \pi a}{2\sqrt{\sigma - \pi v}} \text{ sin. } t\sqrt{\sigma - \pi v}$

$\frac{- k a \sigma - \pi a M}{- a (\sigma - \pi v)^2} (1 - \text{cos. } t\sqrt{\sigma - \pi v})$

$= \frac{(- M - k v) \pi t \text{ sin. } t\sqrt{\sigma - \pi v}}{2(\sigma - \pi v)^{\frac{3}{2}}} + \frac{k \sigma + \pi M}{(\sigma - \pi v)^2} \times$

$(1 - \text{cos. } t\sqrt{\sigma - \pi v})$; & $x = \left[\frac{M + k v}{\sigma - \pi v} \right.$

$\left. - \frac{v (k \sigma + \pi M)}{(\sigma - \pi v)^2} \right] \times (1 - \text{cos. } t\sqrt{\sigma - \pi v})$

$+ \frac{v (M + k v)}{\sigma - \pi v} \times \frac{\pi t \text{ sin. } t\sqrt{\sigma - \pi v}}{2(\sigma - \pi v)^{\frac{1}{2}}}$.

Si $\sqrt{\sigma - \pi v}$ étoit imaginaire, il n'y auroit pas plus de difficulté; car alors cos. $t\sqrt{\sigma - \pi v}$ seroit égal à la quan-

tité exponentielle toute réelle $\frac{c^{z\sqrt{\pi\nu-\sigma}}+c^{-z\sqrt{\pi\nu-\sigma}}}{2}$.

& $\frac{\text{fin.}\, z\sqrt{\sigma-\pi\nu}}{(\sigma-\pi\nu)^{\frac{1}{2}}}$ seroit $= \frac{c^{z\sqrt{\pi\nu-\sigma}}-c^{-z\sqrt{\pi\nu-\sigma}}}{z\sqrt{(\pi\nu-\sigma)}}$;

quantité qui eſt auſſi toute réelle.

Ainſi dans le cas où les deux valeurs de ν ſont égales, les valeurs de x & de y contiennent des arcs de cercle, & de plus des coſinus & des ſinus, ſi $\sigma-\pi\nu$ eſt poſitif; & des exponentielles ordinaires, ſi $\sigma-\pi\nu$ eſt négatif.

Donc dans l'un & l'autre cas, les oſcillations ne pourront être regardées comme infiniment petites, & l'état d'équilibre ne ſera pas ferme. Il en faut excepter le cas où $\sigma-\pi\nu$ ſeroit poſitif, & dans lequel on auroit de plus $\pi=o$, ou $M+k\nu=o$; car alors les termes qui renferment l'arc x, diſparoîtroient, & les autres ne renfermeroient que des coſinus d'angles.

COROLLAIRE VII.

Nous voici arrivés au ſeul cas qu'on ait conſidéré juſqu'ici, celui du ſynchroniſme des deux vibrations, verticale & rotatoire.

Or il eſt évident que ce ſynchroniſme aura lieu, ſi l'une des valeurs de u, u', eſt égale à zero; car alors pour un même t les deux valeurs de y & de x auront même rapport. Il faut donc que $M+k\nu$ ſoit $=o$, ou $M+k'\nu'=o$.

Donc, puiſque l'on a en général $-p-\theta\nu=-\sigma$,

$+\pi\nu$, il s'enſuit qu'il y aura ſynchroniſme dans les deux vibrations, lorſque $\frac{M}{k}$ ſera égal à une des racines de l'équation $\frac{MM}{kk} + \frac{M}{k}\left(\frac{\sigma-\theta}{\pi}\right) = -\frac{\varrho}{\pi}$.

REMARQUE I.

On pourroit croire auſſi qu'une des valeurs de u ſeroit $= o$, lorſque $\sigma - \pi\nu$, ou $\sigma - \pi\nu'$ ſeroit $= o$; mais alors, comme il eſt aiſé de le voir par la ſeule inſpection des équations différentielles (G) & (H), la valeur de u ou celle de u' renfermeroit des arcs de cercle, à moins que $M + k\nu$ ne fût auſſi $= o$; ce qui reviendroit au cas précédent.

REMARQUE II.

J'ai donné dans ma *Dynamique* (Art. 124 & ſuiv. ſeconde Edition) une méthode pour déterminer les cas où des vibrations de la nature de celle-ci ſeroient ſynchrones; mais ce détail me meneroit trop loin, & ſans prétendre exclure les autres cas poſſibles, je me contenterai de dire que le ſynchroniſme des vibrations aura encore lieu, ſi $\pi = o$, $\rho = o$, & $\sigma = \theta$, comme il eſt aiſé de voir par l'intégration des équations (C) & (D) qui eſt alors très-facile; & on peut remarquer en paſſant que $\pi = o$ rend toujours $\rho = o$, puiſque $\pi = o$ donne $b = a$, & que $b = a$ donne $\rho = o$. Au reſte le cas de $\pi = o$, $\rho = o$, & $\sigma = \theta$, revient encore à celui de

$\frac{M^2}{k^2}\pi + \frac{M}{k}(-\theta+\sigma) = -\rho$; car cette équation aura lieu, $\frac{M}{k}$ étant tout ce qu'on voudra, si l'on a à la fois $\pi = \sigma$, $\sigma = \theta$, & $\rho = o$.

COROLLAIRE VIII.

Donc en général les oscillations seront synchrones, si $\frac{M}{k}$ a la valeur déterminée par l'équation précédente. S'il y a encore d'autres cas possibles de synchronisme, on les déterminera par la méthode indiquée ci-dessus.

COROLLAIRE IX.

Supposons un corps pesant plongé dans un fluide, & en équilibre dans ce fluide, ensorte que N' soit sa partie enfoncée; on aura $\frac{N'\varepsilon}{\Delta M'} - 1 = o$, & $\zeta = o$.

Supposons à présent que le centre C s'éleve de la quantité α, & qu'en même-tems le corps se meuve circulairement de D vers O de la quantité ε; la partie enfoncée N deviendra $N' - \frac{k'\alpha(a+b)}{k'-a-b} - \frac{k'\varepsilon(bb-a\alpha)}{2(k'-a-b)}$, & l'on aura $\frac{N\delta}{\Delta M'} - 1 = -\frac{k'\alpha\delta(a+b)}{\Delta M'(k'-a-b)} - \frac{k'\varepsilon\delta(bb-a\alpha)}{2\Delta(k'-a-b)M'} = R$; & par conséquent k, ou $\frac{2\alpha R}{\theta'^2} = -\frac{k'\alpha\delta(a+b).2\alpha}{\Delta M'(k'-a-b)\theta'^2} - \frac{2ak'\varepsilon\delta(bb-a\alpha)}{2\Delta(k'-a-b)M'\theta'^2}$; la distance ζ du centre de gravité de la partie enfoncée

à la ligne verticale qui passe par le centre de gravité de la masse totale, sera $\epsilon(e+f) - \frac{\alpha(b^2-a^2)k'}{2N'(k'-\alpha-b)} - \frac{\epsilon(bb-aa)^2}{4N'(k'-a-b)} - \frac{b^3\epsilon}{3N'} - \frac{a^3\epsilon}{3N'}$; & l'on aura $M = \frac{2aN'\delta}{\theta'^2.\Delta.G} \times \left[\epsilon(e+f) - \frac{\alpha(b^2-a^2)k'}{2N'(k'-a-b)} - \frac{\epsilon(bb-aa)^2}{4N'(k'-a-b)} - \frac{b^3\epsilon}{3N'} - \frac{a^3\epsilon}{3N'}\right]$; donc $k = -\theta\alpha + \epsilon\pi$; & $M = -\sigma\epsilon - \alpha\rho$; donc les deux oscillations du corps seront synchrones, s'il y a entre α & ϵ le rapport indiqué par l'équation suivante

$$\left(\frac{\sigma\epsilon+\alpha\rho}{\theta\alpha-\epsilon\pi}\right)^2\pi + (\sigma-\theta)\left(\frac{\sigma\epsilon+\alpha\rho}{\theta\alpha-\epsilon\pi}\right) = -\rho.$$

Si b & a sont exactement ou à-peu-près égales, alors $\pi = o$, $\rho = o$; & pour que l'équation précédente ait lieu, il faudra de plus que $\sigma = \theta$; donc on a pour lors l'équation $\frac{2a\delta}{\theta'^2.\Delta.G} \times \left[\frac{2a^3}{3} - N'(e+f)\right] = \frac{2a\delta}{\theta'^2.\Delta.M'} \times \frac{2ak'}{k'-2a}$; & par conséquent $\frac{2a^3}{3G} - \frac{N'.e+f}{G} = \frac{2ak'}{M'(k'-2a)}$; équation qui doit avoir lieu, pour que les deux oscillations soient synchrones.

COROLLAIRE X.

Lorsque le corps fait des oscillations synchrones, telles qu'on vient de les déterminer, on a vû que x est à y en rapport constant : donc menant l'horizontale CP, si

on prend $\frac{CP}{1} = \frac{y}{x}$, ce point P reſtera en repos ; car le mouvement de rotation de P ſuivant PH, ſera égal au mouvement y du centre C. Donc ce point P ſera le centre ſpontané de rotation du corps.

COROLLAIRE XI.

Le point H qui répond perpendiculairement au point P, a un mouvement vertical $= y$, & un mouvement circulaire $= x.CH$, & ce mouvement circulaire en produit deux autres, l'un vertical $= \frac{x \times CH \times CP}{C.H} = x.CP = y$, & en ſens contraire à y, c'eſt-à-dire, à HP ; l'autre horiſontal ſuivant HB, qui ſera égal $x.PH$. Ainſi le point H eſt bien à la vérité en repos dans le ſens vertical, mais nullement dans le ſens horiſontal. On auroit donc tort de regarder ce point H comme le vrai centre de rotation du corps, ainſi que M. Bouguer paroît l'avoir fait dans ſa *Manœuvre des Vaiſſeaux*, p. 260. On peut donc regarder la ſolution de ce ſavant Géometre comme incomplette & imparfaite, au moins à cet égard, puiſqu'on y fait abſtraction d'un mouvement horiſontal très-réel de ce point H.

J'ajouterai à cette occaſion que la ſolution de M. Bouguer eſt limitée, en ce qu'il ne conſidere que le cas où les deux oſcillations ſont ſynchrones. Il eſt vrai qu'il prétend qu'elles le doivent être, mais par une raiſon que les Mathématiciens trouveront bien peu ſatisfaiſante.

Si *les deux mouvemens*, dit-il, p. 259, *n'etoient pas exactement ſimultanés, ils ne ſe perpétueroient pas; il faut qu'ils s'accordent pour ne ſe pas détruire, & la néceſſité de cet accord fait que les plans de flottaiſon ſe coupent en quelque point H.* Certainement perſonne ne verra pourquoi ces mouvemens ſi indépendans l'un de l'autre, & ſi différens en quantité & en direction, doivent être ſimultanés pour ne ſe pas détruire. Il ne peut y avoir ici d'autres cauſes de deſtruction du mouvement, que la réſiſtance & la ténacité du fluide, dont on fait abſtraction, & qui doit auſſi empêcher les mouvemens ſynchrones de ſe perpétuer. Il eſt d'autant plus ſingulier que M. Bouguer ait été dans cette erreur, que dès 1752, cinq ans auparavant, j'avois donné dans mon *Eſſai ſur la réſiſtance des fluides*, la méthode de déterminer les deux mouvemens, ſoit dans le cas du ſynchroniſme, ſoit dans tout autre.

Je ne ſai pas au reſte ce que veut dire M. Bouguer quand il prétend, p. 260, que dans ce Problême, & en général dans les Problêmes de Méchanique, *le calcul fondé ſur quelque ſuppoſition fauſſe, demeure preſque toujours défectueux, à la différence des Problêmes de Géométrie, où l'on s'apperçoit du mécompte, en parvenant à des valeurs imaginaires.* On a vû au contraire par tout ce qui précéde, & on peut d'ailleurs s'aſſurer aiſément, que les fauſſes ſuppoſitions ſeront toujours corrigées par le dernier réſultat du calcul. Si on ſuppoſe, par exemple, que le centre monte au lieu qu'il deſcend, la valeur de

de y ſera négative: ſi le corps tourne dans un ſens contraire à celui qu'on a ſuppoſé, la valeur de x ſera négative: ſi les oſcillations ne ſont pas infiniment petites, les valeurs de x & de y l'indiqueront de même, & ainſi du reſte.

COROLLAIRE XII.

Pour trouver en général la longueur du pendule ſimple iſochrone au corps oſcillant, on nommera CP, h', & on aura $x = \frac{y}{h'}$; donc l'équation (B) deviendra

$$d\,dy = \frac{2\,a\,dt^2}{\theta'^2}\left[R - \frac{\delta\,k'\,y\,(a+b)}{\Delta\,.\,M'\,(k'-a-b)} - \frac{\delta\,k''y\,(b\,b-a\,a)}{2\,h'\,\Delta\,.\,M'\,(k'-a-b)}\right];$$

or appellant y l'arc parcouru par le pendule iſochrone de longueur λ, on auroit $d\,dy = \frac{2\,a\,dt^2}{\lambda\,\theta^2} \times (K-y)$; & par conſéquent

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\delta\,k'\,(a+b)}{\Delta\,.\,M'\,(k'-a-b)} + \frac{\delta\,k'\,(b\,b-a\,a)}{2\,h'\,\Delta\,.\,M'\,(k'-a-b)};$$

d'où il eſt aiſé de conclure que la longueur du pendule ſimple cherché ſera $\frac{\Delta\,.\,M'\,(k'-a-b)}{\delta\,k'\,(a+b) + \frac{\delta\,k'\,(b\,b-a\,a)}{2\,h'}}$.

Et ſi on n'a point d'égard au mouvement du fluide, c'eſt-à-dire, ſi k' eſt infinie, cette longueur ſera $\frac{2\,\Delta\,.\,M'\,h'}{2\,\delta\,h'\,(a+b) + \delta\,(b\,b-a\,a)}$.

REMARQUE GÉNÉRALE.

Je n'ai point eu d'égard dans la ſolution des Problêmes précédens à la force centrifuge des parties du corps oſcillant; mais il eſt facile de voir, que l'effet de ces forces doit être conſidéré comme nul, puiſque la viteſſe eſt infiniment petite, & que la force centrifuge eſt comme le quarré de la viteſſe. D'ailleurs il eſt aiſé de prouver que dans les oſcillations d'une figure plane, ou d'un ſolide compoſé de deux parties égales, tel que nous venons de le ſuppoſer, la ſomme des forces réſultantes des forces centrifuges eſt nulle, & que la ſomme des momens de ces forces l'eſt auſſi. Donc &c.

§. II.

Des oſcillations planes d'un corps irrégulier.

Nous ſuppoſons ici un corps irrégulier quelconque, avec cette ſeule condition, qu'il ſoit diviſé en deux parties égales & ſemblables par le plan vertical dans lequel ſe trouvent le centre de gravité de la maſſe totale, & le centre de gravité de la partie enfoncée; conditions néceſſaires, pour que les oſcillations, tant rectilignes & verticales, que curvilignes, ſe faſſent dans ce même plan, ainſi qu'on le ſuppoſe ici. Or cela poſé, le Problême n'a aucune difficulté de plus que le précédent.

Soit donc *CBOD* (*fig.* 19.) le plan vertical qui paſſe par le centre de gravité *C* du corps, & par le centre de

gravité G de la partie enfoncée, & ſoit $BYDZ$ (*fig.* 20.) la ſection horiſontale du fluide & du corps; enſorte que les parties BZD, BYD ſoient égales & ſemblables. Ayant mené par le point A la ligne ZY perpendiculaire à BD, on nommera, comme ci-deſſus,

La peſanteur . . . . . p
Le corps enfoncé . . . . . M'
La partie enfoncée au premier inſtant . . . . . N
La denſité du corps . . . . . Δ
Celle du fluide . . . . . δ
La ſurface du fluide . . . . . K'
La portion de ſurface BYZ . . . . . B
La portion DZY . . . . . A
La diſtance AE du point A au centre de gravité E de la ſurface $BZDY$ . . . . . R'
Le ſolide que formeroit la ſurface BZY, en tournant de la quantité infiniment petite x autour de ZAY . . . . . $xq.b^3$
Le ſolide formé dans la même hypothèſe par la partie ZDY . . . . . $xp.a^3$
La diſtance du centre de gravité du premier de ces ſolides à la ligne ZY . . . . . r
La diſtance du centre de gravité du ſecond à la même ligne . . . . . s
La ſomme des produits des particules par le quarré de leur diſtance à un axe horizontal paſſant par C . . . . . G

Et le reſte comme ci-deſſus; on aura

$$(N)\ldots\ddot{x}=\frac{2\mu dt^2}{\theta'^2}\times\frac{\delta}{\Delta.G}\times\left[NG-\frac{y(A+B)R'K'}{K'-A-B}-xqb^3r-xpa^3s-\frac{xqb^3R'(A+B)}{K'-A-B}+\frac{xpa^3(A+B)R'}{K'-A-B}+Nx(e+f)\right].$$

$$(O)\ldots\ddot{y}=\frac{2\mu dt^2}{\theta'^2}\left[R-\frac{\delta K'y(A+B)}{\Delta.M'(K'-A-B)}-\frac{K'x(qb^3-pa^3)\delta}{(K'-A-B)\Delta.M'}\right].$$

On intégrera ces équations, comme on a fait ci-devant les équations (L), (M); & on en tirera des conclusions semblables; il n'y aura à cela aucune difficulté nouvelle.

REMARQUE I.

Si on nomme h la distance du centre de gravité de la partie A à ZY, & l la distance du centre de gravité de la partie B à ZY, on aura par les propriétés connues du centre de gravité $(A+B)R'=B.l-A.h$; $xqb^3=xB.l$; $xpa^3=x.Ah$; & par conséquent $qb^3=B..l$; $pa^3=A.h$, & $qb^3-pa^3=(A+B).R'$. On peut substituer ces valeurs dans les équations précédentes (N), (O).

REMARQUE II.

Pour avoir la quantité r, on prendra la somme des produits des ordonnées ut de la partie BZY par la partie infiniment petite $\theta\lambda$ de l'abscisse, & par le quarré de

$A\theta$, & on diviſera ce produit par $q \cdot b^3$; on fera de même pour avoir s dans la partie ZDY.

COROLLAIRE I.

Si la diſtance AE eſt fort petite, on pourra alors ſuppoſer $R' = o$, & effacer dans les équations (N), (O), les termes où R' ſe rencontre.

COROLLAIRE II.

Si de plus les parties BZY, ZDY, ſont à très-peu-près égales & ſemblables, on pourra mettre B au lieu de A, r au lieu de s, & $q\,b^3$ au lieu de $p\,a^3$; ce qui ſimplifiera encore les équations.

COROLLAIRE III.

Les deux cas précédens auront lieu à la fois, ſi le corps qui oſcille, eſt un ſolide de révolution dont l'axe ſoit preſque vertical. C'eſt pourquoi on aura dans ce cas

$$(P) \ldots\ldots ddx = \frac{2\,a\,dt^2}{\theta'^2} \times \frac{\delta^5}{\Delta \cdot G} \times [NC - 2rx \cdot hA + Nx(e+f)].$$

$$(Q) \ldots\ldots ddy = \frac{2\,a\,dt^2}{\theta'^2} \times \left[R - \frac{2\delta^5 K' yA}{\Delta M'(K'-2A)}\right].$$

§. III.

Des oſcillations d'un corps ſolide quelconque de figure irréguliere.

Quoique j'aie auſſi traité ce ſujet dans l'Ouvrage déja

cité, & que j'aie donné tous les principes pour résoudre le Problême, je crois cependant qu'on ne sera pas fâché d'en voir ici l'application, & la solution même rendue à certains égards plus générale & plus facile. Je supposerai d'abord que le fluide a une surface infinie, & par conséquent n'a aucun mouvement avec le corps; au reste après ce que nous avons dit ci-dessus, il est facile, si l'on veut, d'avoir égard à cette circonstance, qui rend le calcul plus compliqué, sans rendre le Problême plus difficile. J'aurai soin de plus, ce qui n'a pas été exactement observé dans les figures de mon Ouvrage, d'y placer les différens points d'une maniere conforme au discours.

Soit donc *BZDY* (*fig.* 21.) la commune section du corps flottant, & de la surface du fluide au premier instant du mouvement, *A* le point de cette surface *BZDY*, sur lequel tombe la perpendiculaire ou verticale menée du centre de gravité du corps, *BAD* une ligne menée *à volonté* par ce point *A*; je dis *à volonté*, ce qu'il faut bien remarquer, parce que nous serons les maîtres dans la suite de donner à cette ligne la position que nous jugerons la plus propre à simplifier le Problême; soit enfin *ZAY* perpendiculaire à cette ligne.

Imaginons présentement que du centre de gravité de la partie enfoncée au premier instant du mouvement, on tire une ligne verticale qui tombe au point *C* de la surface *BZDY*; cette verticale doit être très-peu éloignée de la verticale qui passe par le centre de gravité

du corps, puiſqu'on ſuppoſe que le corps ne fait que de très-petites oſcillations. Ainſi tirant les lignes $\mathcal{C}I$, $\mathcal{C}\mathcal{N}$ perpendiculaires à AB, AY, ces lignes ſeront fort petites.

Pour embraſſer la queſtion de la maniere la plus générale, & ſous un point de vûe qui pourroit même être utile dans d'autres occaſions, je pourrois ſuppoſer que le centre décrivît une courbe quelconque à double courbure. Mais je prouverai rigoureuſement dans la ſuite, ce qui eſt d'ailleurs aſſez clair par ſoi-même, que le centre de gravité ne doit réellement avoir qu'un mouvement vertical; je ſuppoſerai d'abord qu'il ait en effet ce ſeul mouvement, & je ferai voir que ma ſuppoſition eſt légitime. De plus les parties du corps tournent en même-tems autour de ce centre; & pour repréſenter leur mouvement de la maniere la plus générale, voici de quelle maniere je m'y prends.

J'imagine d'abord un plan vertical $BQDH$ (*fig.* 22.) qui paſſe par le centre de gravité C du corps, par la verticale CA, & par la ligne BAD; je tire dans ce plan l'horizontale $C\pi$, & dans le même plan *à volonté* la ligne Cp qui faſſe un très-petit angle avec $C\pi$; & je ſuppoſe que ce plan tourne autour de la verticale QA, tandis que la ligne Cp tourne elle-même autour du point C, en reſtant dans ce même plan. Je ſuppoſe enfin, que durant ce double mouvement, un plan perpendiculaire à Cp ſe meuve outre cela autour de Cp d'un mouvement angulaire; par le moyen de ce triple mouvement

on repréſentera, comme il eſt évident, & de la maniere la plus générale, tous les mouvemens que peuvent avoir autour du centre de gravité C les parties du corps flottant. Voyez *le Mémoire précédent*, §. I & II.

Je ſuppoſe enfin, comme dans les *Recherches ſur la préceſſion des Equinoxes*, afin de pouvoir adapter à la queſtion préſente les formules de cet Ouvrage, que le mouvement angulaire du plan $BQDH$ autour de CA (*fig.* 22.) ſe faſſe de D vers Y (*fig.* 20.); que le mouvement angulaire de la ligne Cp (*fig.* 22.) ſe faſſe de p vers π; qu'enfin le mouvement angulaire du plan perpendiculaire à Cp, autour de cette ligne Cp, ſe faſſe de maniere que la partie BZD (*fig.* 20.) s'enfonce, & que la partie BYD ſe releve.

Cela poſé, ſoient γ, γ', les centres de gravité des ſolides infiniment petits que forment les parties ZDY, ZBY, en tournant infiniment peu autour de ZY; R, S, les centres de gravité des ſolides infiniment petits que forment les parties BYD, BZD, en tournant autour de BD; enfin a le centre de gravité de l'aire totale $BZDY$; ſoient à préſent nommées les données & les inconnues de la maniere ſuivante;

La peſanteur . . . . . g
La partie enfoncée au premier inſtant . . . . . N
Le corps entier . . . . . M'
La denſité du corps . . . . . Δ
Celle du fluide . . . . . δ
BA . . . . . b
AD . .

AD . . . . . a

La distance CA (*fig.* 22.) du centre de gravité à BD . . . . e

La distance de la surface $BZDY$ (*fig.* 21.) au centre de gravité de la partie enfoncée N . . . . . f

AI . . . . . ζ

$I\zeta$ . . . . . ζ

L'espace que le centre C (*fig.* 22.) parcourt verticalement pendant le tems t . . . . . y

L'espace que parcourt circulairement dans le même tems & dans le plan $BQDH$ un point quelconque à la distance 1 du centre C x

L'espace que parcourt circulairement autour de l'axe Cp un point quelconque à la distance 1 de l'axe Cp de rotation . . . . . P

L'angle de rotation du plan $BQDH$ autour de CA . . . . ϵ

Les solides très-petits que forment ZBY (*fig.* 21.) ZDY par leur rotation autour de ZY . . . $x.q.b^3$ & $x.p.a^3$

Les solides très-petits que forment BZD, BYD en tournant autour de BD . . . . . $P.p'.AZ^3$ & $P.q'.AY^3$

La somme des produits des particules du corps par le quarré de leurs distances à Cp (*fig.* 22.), ou, ce qui revient au même, à l'horizontale $C\pi$ . . . . . K

La somme des produits des mêmes particules par le quarré de leurs distances à un plan passant par C & perpendiculaire à Cp ou $C\pi$ . . . . . M''

La somme des produits des mêmes particules par le produit de leurs distances à deux plans, l'un horizontal passant par $C\pi$, l'autre vertical & perpendiculaire

à $C\pi$ . . . . . Ω

La somme des produits des mêmes particules par le produit de leurs distances à un plan horizontal passant par $C\pi$, & à un plan vertical passant par la même ligne $C\pi$. Σ

La somme des produits des mêmes particules par le produit de leurs distances à un plan vertical passant par $C\pi$, & à un plan vertical perpendiculaire à $C\pi$. . Θ

Enfin la somme des produits des particules par le quarré de leurs distances à un plan horizontal passant par $C\pi$ . . . . . Ζ

Toutes ces dénominations posées, il est aisé de voir dans la fig. 21. par la méthode employée & détaillée dans l'*Essai sur la résistance des fluides*;

1°. Que le centre de gravité de la partie enfoncée après le tems t, aura parcouru dans le sens de AI l'espace $x(e+f) - uA.\frac{x.q.b^3}{N} - \frac{VA.x.p.a^3}{N} + \frac{P.z'A.p'.AZ^3}{N} - \frac{P.q'.yA.AY^3}{N} - \frac{Y.BZDY.Ab}{N}$; à quoi il faut ajouter $AI = \zeta$, pour marquer ce que la distance AI est devenue à la fin du tems t.

2°. On trouvera de même que le chemin du centre de gravité de la partie enfoncée, suivant $I\zeta$, est $P(e+f) - \frac{P.q'.AY^3.yR}{N} - \frac{P.p'.AZ^3.SZ'}{N} + \frac{x.u\gamma'.q'.b^3}{N} - \frac{x.V\gamma.p.a^3}{N} + \frac{Y.BZDY.ba}{N}$. De plus il faudra ajouter à cette quantité la ligne $I\zeta = \zeta$, pour avoir l'expression de cette distance à la fin du tems t.

Enfin la partie enfoncée à la fin du tems t, ſera $N - y \cdot BZDY + x \cdot p \cdot a^3 - x \cdot q \cdot b^3 - AY^3 \cdot P \cdot q' + AZ^3 \cdot P \cdot p'$.

Cela fait, & nous ſervant ici des formules du Mémoire précédent ſur les mouvemens d'un corps de figure quelconque, on conſidérera que dans l'hypothèſe préſente :

1°. $\Psi =$ au produit de la denſité δ du fluide par la partie enfoncée, moins le poids du corps.

2°. $\gamma = o$, & $\varphi = o$; donc par les formules (G) & (H) du Mém. précéd. le centre n'a qu'un mouvement vertical.

3°. $-\Psi \nu' =$ au produit de $g \delta N$ par ce que devient ζ à la fin du tems t.

4°. $-\Psi \mu' =$ au produit de $g \delta N$ par ce que devient ζ à la fin du tems t.

De plus, comme on a nommé ici y ce qui a été nommé q dans le Mémoire cité, x ce qui a été nommé n, ϵ ce qui a été nommé e, & g ce qui a été nommé p ; on aura les équations $M' \cdot \Delta \, d \, dy = \frac{2 \, a \, d \, t^2}{\theta'^2} \times \frac{\Psi}{g}$;

$\Delta \, d \, dx \, (M'' + \Xi) + \Delta \, d \, dP \cdot \Theta - \Delta \, d \, d \, \epsilon \cdot \Sigma + \frac{2 \, \Psi \, a \, \nu' \, d \, t^2}{g \, \theta'^2} = o.$

$\Delta \, ddx \times - \Sigma + ddP \cdot \Delta \, \Omega - \Delta \, dd\epsilon \, [K - \Xi - M''] = o.$

$\Delta \, d \, d \, x \cdot \Theta + \Delta \, d \, d \, P \, (K) - \Delta \, d \, d \, \epsilon \cdot \Omega + \frac{2 \, a \, \Psi \, \mu' \, d \, t^2}{\theta'^2 \, g} = o.$

Mettant dans ces équations à la place de $-\Psi \nu'$ & $-\Psi \mu'$ leurs valeurs déja trouvées en x, y, P & en

conſtantes, & mettant pour ddt dans la ſeconde & la quatriéme équation ſa valeur en ddx & ddP tirée de la troiſiéme, enfin faiſant enſorte que la ſeconde équation ne contienne que ddx, & la quatriéme que ddP, ce qui ſe fera en chaſſant ddP de la ſeconde équation, & ddx de la quatriéme; on aura des équations de la forme ſuivante;

$$ddy + (A + Bx + Cy + D.P)\,dt^2 = o$$
$$ddx + (A' + B'x + C'y + D'.P)\,dt^2 = o$$
$$ddP + (A'' + B''x + C''y + D''.P)\,dt^2 = o;$$
$$\& \quad \varepsilon = \frac{\Omega.P - x.\Sigma}{K - \Xi - M''}.$$

Or j'ai donné dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Pruſſe, année 1748, des méthodes pour intégrer les trois premieres équations. Donc le Problême eſt réſolu.

Si le corps qui oſcille eſt à-peu-près ſphérique, ayant d'ailleurs une figure irréguliere quelconque, on aura $\Omega = o, \Sigma = o, \Theta = o, \Xi = \frac{K}{2}$; les équations précédentes ſe ſimplifieront beaucoup, & l'on aura $\varepsilon = o$; & $M'\Delta\,ddy = \frac{2\,a\,dt^2.\Psi}{\theta'^2\,g}$; $\Delta\,ddx\,(2M'' + K) + \frac{4\Psi a\nu'dt^2}{g\,\theta'^2} = o$; $\Delta\,ddP.K + \frac{2a\Psi\mu'dt^2}{g.\theta'^2} = o$.

De plus il eſt aiſé de voir que dans ce cas on aura $ab = o$, $Ab = o$, $AZ = AY$; $SZ' = yR$; $a = b$; $u\gamma' = V\gamma = \bullet$; $uA = VA$; $AZ' = Ay$; $q = p$; $q' = p'$; & $q = q'$; donc on aura $\Psi = (\delta.N - \delta y.BZ\,D.Y$

$-\Delta . M') g; -\Psi \nu' = g \delta N [\zeta + x (e+f) - \frac{2 V A . p . a^3 x}{N}]; -\Psi \mu' = g \delta N [\zeta + P (e+f) - \frac{2 P . q' . y R . A Y^3}{N}]$; & par conséquent $M' \Delta d d y = \frac{2 a d t^2}{\theta'^2} \times [\delta N - \Delta M' - \delta y . B Z D Y]$; $\Delta d d x (2 M'' + K) = \frac{4 a d t^2}{g \theta'^2} \times g \delta N [\zeta + x (e+f) - \frac{2 V A . p . a^3 x}{N}]$; $\Delta . K d d P = \frac{2 a d t^2}{g \theta'^2} \times g \delta N [\zeta + P (e+f) - \frac{2 P . q' . y R . A Y^3}{N}]$.

Dans ce cas on voit encore que $V A = y R$, & $A Y = x$, ou $A D$, puiſqu'il s'agit d'un ſolide à-peu-près ſphérique, & que $B Y D Z$ eſt par conſéquent à-très-peu-près un cercle, dont A eſt le centre; de plus on a dans ce même cas $M = \frac{K}{2}$; & par conſéquent $2 M + K = 2 K$; ainſi on trouvera par l'intégration des équations précédentes, que P & x ſeront à-peu-près entr'elles, dans la raiſon conſtante de ζ à ζ; d'où il eſt aiſé de conclure que les oſcillations du corps, pour tourner autour de ſon centre, ſe feront dans un plan vertical paſſant par la ligne $A \zeta$ qui joindroit les points A, ζ dans la figure 21.

Si ſans regarder le corps comme à-peu-près ſphérique, on ſuppoſe ſa figure telle que l'on ait à la fois $\Omega = o$, $\Sigma = o$, $\Theta = o$, $\Xi = \frac{K}{2}$, comme nous l'avons ſup-

posé pour simplifier le calcul dans l'*Essai sur la résistance des fluides*, on aura les mêmes équations qu'on a trouvées ci-dessus pour le cas de la figure à-peu-près sphérique; $M'\Delta ddy = \frac{2adt^2\Psi}{\theta'^2 g}$; $\Delta ddx\left(M'' + \frac{K}{2}\right) + \frac{2\Psi a\nu' dt^2}{g\theta'^2} = o$; $\Delta . K ddP + \frac{2a\Psi\mu' dt^2}{\theta'^2 g} = o$;

Supposons présentement $\frac{2aN\delta}{\theta'^2 M'\Delta} - \frac{2a}{\theta'^2} = k$; $\frac{2a\delta . BZDY}{\theta'^2\Delta . M'} = \theta$; $\frac{(p.a^3\delta - q.b^3\delta)2a}{\Delta . M'.\theta'^2} = \pi$; $\frac{P.p'.\delta . AZ^3 - P.q'.\delta AY^3}{\delta . M'.\theta'^2} \times 2a = \chi$; $\frac{2aN\delta\zeta}{\Delta . K.\theta'^2} = A$; $\frac{2aN\delta(e+f)}{\Delta . K.\theta'^2} - \frac{q'.yR.AY^3}{N} \times \frac{2a\delta . N}{\Delta . K.\theta'^2} - \frac{2a\delta N}{\Delta . K.\theta'^2} \times \frac{p'.SZ'.AZ^3}{N} = B$; $\frac{2a\delta}{\Delta . K.\theta'^2}(u\gamma' q.b^3 - V\gamma . p.a^3) = C$; $\frac{2a\delta}{\Delta . K.\theta'^2} \times BZDY.ab = D$; $\frac{2aN\delta C}{\left(\frac{K}{2} + M''\right)\theta'^2\Delta} = M$; $\frac{2aN\delta}{\frac{K}{2} + M''} \times \frac{e+f}{\Delta . \theta'^2} - \frac{2a\delta . uA.q.b^3}{\left(\frac{K}{2} + M''\right)\theta'^2\Delta} - \frac{2a\delta . VA.pa^3}{\left(\frac{K}{2} + M''\right).\Delta.\theta'^2} = \sigma$; $\frac{2a\delta . BZDY.Ab}{\left(\frac{K}{2} + M''\right).\Delta.\theta'^2} = \rho$; enfin $\frac{2a\delta . Z'A.p'.AZ^3}{\left(\frac{K}{2} + M''\right).\Delta\theta'^2} - \frac{2a\delta . yA.q'.AY^3}{\left(\frac{K}{2} + M''\right)\Delta . \theta'^2} = \Psi$; & on aura les trois équations suivantes;

(B') . . . . . $dd\pi = (M - \rho y + \sigma x - \Psi P)\, dt^2$

(C') . . . . . $dd\,y = (k - \theta y + \pi x + \chi P)\, dt^2$

(D') . . . . . $ddP = (A + B.P + Cx + Dy)\, dt^2$.

J'ai donné dans plusieurs Ouvrages (entr'autres dans les Mémoires de l'Académie de Berlin de 1748 & 1750), la méthode pour intégrer ces sortes d'équations; & je laisse au Lecteur le détail de l'intégration de celles-ci.

REMARQUE I.

J'observerai encore, que comme la ligne BAD a une position arbitraire par l'hypothèse, je puis la supposer placée de maniere qu'elle passe par le centre de gravité a de l'aire $BZDY$, & qu'ainsi $ab = o$, & par conséquent $D = o$. On peut donc simplifier toujours l'équation (D') en effaçant le terme $+ Dy$, quelle que soit la figure du corps.

REMARQUE II.

De plus, si la figure $BZDY$ est composée de deux parties égales & semblables, & que la ligne Aa tirée par le centre de gravité a, partage, ou exactement, ou à-peu-près, cette figure en ces deux parties, on aura $u\gamma' = o$; $V\gamma = o$; & par conséquent $C = o$; par la même raison $\chi = o$, & $\Psi = o$; ainsi on aura

(E') . . . . $ddP = (A + B.P)\, dt^2$, équation facile à intégrer.

(F') . . . . . $dd\,y = (k - \theta y + \pi x)\, dt^2$;

(G') . . . . . $dd\,x = (M - \rho x + \sigma x)\, dt^2$; deux

équations très-faciles à intégrer par les méthodes rappellées ci-deſſus.

Si le ſolide eſt diviſé, ou exactement, ou à-peu-près en deux parties égales & ſemblables par un plan vertical paſſant par l'axe $C\pi$, en ce cas l'on a $\Sigma = o$, & $\Theta = o$; on aura donc les trois équations $M'\Delta\, d\,dy = \frac{2\,a\,d\,t^2}{\beta'^2} \times \frac{\Psi}{g}$; $\Delta\, d\, d\, x(M'' + \Xi) + \frac{2\,\Psi\, a'\, d\,t^2}{\beta'^2\, g} = o$; $dd\,P\left(\Delta.K - \frac{\Omega\,\Omega\,\Delta}{K - \Xi - M''}\right) + \frac{2\,a\,\Psi\,\mu'.d\,t^2}{\beta'^2\, g} = o$. Et $\varepsilon = \frac{P\,.\,\Omega}{K - \Xi - M'}$. Donc conſervant les noms donnés ci-deſſus, excepté qu'au lieu de $\frac{K}{2} + M''$ on mettra $\Xi + M''$, & au lieu de $\Delta.K$, la quantité $\Delta.K - \frac{\Omega\,\Omega\,\Delta}{K - \Xi - M''}$, on aura les mêmes équations E', F', G' qu'on a trouvées ci-deſſus.

Ce cas eſt celui des oſcillations des Navires, dont on peut par conſéquent déterminer le tangage & le roulis par l'intégration des trois équations dont on vient de parler. C'eſt ſur quoi il ne paroît pas néceſſaire d'entrer dans un plus grand détail; mais on doit voir maintenant qu'il ne reſte plus de difficulté dans la ſolution de tous les Problêmes qu'on peut propoſer ſur cette matiere.

Fin du troiſiéme Mémoire.

QUATRIÉME

QUATRIÈME MÉMOIRE.

Remarques ſur les Loix du mouvement des fluides.

I.

SOIT *A B F E* (*fig.* 23.) un vaſe que nous conſidérerons d'abord comme plan, & dans lequel ſoit renfermé un fluide homogene; ſoit $CP = x$, $PM = y$, $PO = z$; θ une fonction indéterminée du tems t écoulé depuis le commencement du mouvement; Q la viteſſe du fluide parallèlement à CP; P ſa viteſſe parallèlement à PM; j'ai démontré, Art. 148 de mon *Eſſai ſur la réſiſtance des fluides*, que $Q = \theta q$, $P = \theta p$, q & p étant des fonctions de x & de z. Ces équations ſont fondées ſur cette conſidération, que le rapport de Q à P ne doit point renfermer le tems t, lorſque $z = y$; car puiſque le fluide contigu aux parois $B\,M\,F$ coule le long de ces parois, on doit avoir alors $\frac{Q}{P} = \frac{dx}{dy} =$ à une fonction de x & de y. Donc lorſque $z = y$, on a $\frac{Q}{P} =$ à une

fonction de x & de y, quel que soit z; ce qui ne sauroit être, à moins que l'on n'ait $Q = q\theta$, & $P = p\theta$. A la vérité cette équation n'auroit pas lieu, s'il n'y avoit point de vase, & si le fluide étoit indéfini *en tout sens*. Mais cette supposition n'a point lieu dans la nature.

J'ai démontré outre cela dans l'Ouvrage cité, que si on suppose $d(\theta q) = qT\,dt + \theta A\,dx + \theta B\,dz$, & $d(\theta p) = pT\,dt + \theta A'\,dx + \theta B'\,dz$, on aura; 1°. $B' = -A$, ou $\frac{dp}{dz} = -\frac{dq}{dx}$; 2°. (en nommant g la gravité) $\frac{d(g - B\theta p - A\theta q - qT)}{dz} = \frac{d(-\theta qA' - \theta pB' - pT)}{dx}$; or comme cette équation doit être identique, les parties $\frac{d(-qT)}{dz}$ du premier membre, & $\frac{d(-pT)}{dx}$ du second doivent être égales séparément du reste; on aura donc $\frac{dq}{dz} = \frac{dp}{dx}$; & par conséquent $A' = B$; & cette équation, avec celle qu'on a trouvée ci-dessus, $B' = -A$, satisfait au reste de l'équation $\frac{d(g - B\theta p - A\theta q)}{dz} = \frac{d(-\theta qA' - \theta pB')}{dx}$, comme il est aisé de s'en assurer par le calcul. Donc puisque $\frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dz}$, & $\frac{dp}{dz} = -\frac{dq}{dx}$, il s'ensuit que $p\,dz + q\,dx$ & $p\,dx - q\,dz$ sont des différentielles complettes. Ce qui s'accorde parfaitement & sans restriction avec ce qui a été trouvé dans l'Ouvrage cité.

II.

Donc, par la méthode expliquée Art. 58 du même Ouvrage, si on fait $x+z\sqrt{-1}=u$, $x-z\sqrt{-1}=v$, on aura $p=\frac{\phi u+\Delta v}{2}$, $q=\frac{\phi u-\Delta v}{2\sqrt{-1}}$, ϕu & Δu exprimant des fonctions quelconques de u & de v.

Donc $p\,dx-q\,dz$ sera $=\frac{du\,\phi u+dv\,\Delta v}{2}$ & $q\,dx+p\,dz$ sera $=\frac{du\,\phi u-dv\,\Delta v}{2\sqrt{-1}}$. Donc l'intégrale de la premiere quantité sera $\Gamma u+\Xi v$, Γu & Ξv exprimant auſſi des fonctions quelconques de u & de v. Et l'intégrale de la ſeconde ſera $\frac{\Gamma u-\Xi v}{\sqrt{-1}}$.

III.

Lorſque $PO=PM$, c'eſt-à-dire, lorſque $z=y$, on a $dx:dz::q:p$, puiſque le fluide contigu aux parois du vaſe, ſe meut ſuivant ces parois. Donc alors $p\,dx-q\,dy=o$. Donc l'équation de la courbe BMF eſt $\Gamma u+\Xi v=M$, M étant une conſtante, & u étant égal à $x+y\sqrt{-1}$, comme v à $x-y\sqrt{-1}$.

IV.

Lorſque la ligne CP diviſe le vaſe en deux parties égales & ſemblables, les points du fluide placés dans cette ligne, n'ont de viteſſe que dans le ſens vertical

CP, & n'en ont aucune dans le ſens horizontal. Donc $p = o$; donc lorſque $z = o$, on a $\varphi(x + z\sqrt{-1}) + \Delta(x - z\sqrt{-1}) = o$; donc $\Delta x = -\varphi x$; donc $\Delta(x - z\sqrt{-1}) = -\varphi(x - z\sqrt{-1})$. Donc l'équation de la courbe BMF ſera pour lors $\Gamma u - \Gamma v = M$.

V.

Ainſi le Problême ne pourra être réſolu, toutes les fois qu'on ne pourra donner à l'équation de la courbe BMF la forme $\Gamma u - \Gamma v = M$; & par conſéquent on voit déja qu'il y a un très-grand nombre de cas où le Problême ne peut être réſolu analytiquement & rigoureuſement, quoiqu'un grand Géometre ait prétendu (*) qu'il pouvoit toujours l'être, & qu'on pouvoit toujours trouver deux quantités Γu & Γv, telles, que $\Gamma u - \Gamma v$ fût $= M$.

Pour faire ſentir par un exemple très-ſimple la vérité de ce que nous avançons, ſoit, par exemple, $x + y = a$, l'équation de la courbe BMF, qui ſera pour lors une ligne droite ou portion de ligne droite, inclinée vers l'axe CD à un angle de 45 degrés; on aura en ſubſtituant pour x & y leurs valeurs $\frac{u+v}{2}$ & $\frac{u-v}{2\sqrt{-1}}$, l'équation $u\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{-1}}\right) + v\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{-1}}\right) = a$, qui ne peut être réduite à cette forme $\Gamma u - \Gamma v = M$,

(*) Voyez les Mémoires de Berlin 1755, p. 352 & ſuiv.

puiſqu'il faudroit qu'on eût $\alpha\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{-1}}\right)+\upsilon\left(\frac{-1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-1}\right)=\alpha$.

VI.

Pour trouver la fonction θ qui doit multiplier les quantités q & p, voici comment on s'y prendra. Soit l'origine des x & des z en C (*fig.* 24.), & ſoit $CB=A$; il faudra qu'en faiſant $x=\alpha$, on ait $\Gamma(x+y\sqrt{-1})-\Gamma(x-y\sqrt{-1})=\Gamma A\sqrt{-1}-\Gamma-A\sqrt{-1}$; d'où l'on voit que l'équation de la courbe BMF eſt en général $\Gamma(x+y\sqrt{-1})-\Gamma(x-y\sqrt{-1})=\Gamma A\sqrt{-1}-\Gamma-A\sqrt{-1}$. Or nommant Cb, ζ, ſoit imaginée la courbe bmf analogue à BMF, & dont l'équation ſoit en général $\Gamma(x+z\sqrt{-1})-\Gamma(x-z\sqrt{-1})=\Gamma\zeta\sqrt{-1}-\Gamma-\zeta\sqrt{-1}$; il eſt clair que les particules du fluide ſuivront toujours chacune de ces courbes bmf; car il eſt évident que dans ces courbes bmf on a $\frac{dx}{dz}=\frac{q}{p}=\frac{\theta q}{\theta p}$; d'où l'on voit encore que le rapport des viteſſes verticale & horizontale, en un point quelconque m, dépendra uniquement de la poſition de ce point, & non du tems; & que ce rapport ſera toujours le même pour chaque point m.

Cela poſé, ſi on fait $C\zeta$ infiniment petite, & qu'on imagine la courbe $\zeta\mu\varphi$ infiniment proche de l'axe CD; nommant $C\zeta$, α, on aura $\Gamma\alpha\sqrt{-1}-\Gamma-\alpha\sqrt{-1}$

$= \Gamma(x + z\sqrt{-1}) - \Gamma(x - z\sqrt{-1})$; & puiſque z eſt ici infiniment petite, & que $d\Gamma x = dx\varphi x$, comme on l'a ſuppoſé plus haut, on aura $\Gamma(x + z\sqrt{-1}) = \Gamma x + z\sqrt{-1}.\varphi x$; & de même $\Gamma(x - z\sqrt{-1}) = \Gamma x - z\sqrt{-1}.\varphi x$. Donc l'équation de la courbe $\zeta\mu\varphi$ ſera $\Gamma\alpha\sqrt{-1} - \Gamma - \alpha\sqrt{-1} = 2z\sqrt{-1}\,\phi x$. De plus on a par la même raiſon q ou $\frac{\varphi(x+z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} + \frac{\varphi(x-z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} = \frac{\varphi x}{\sqrt{-1}}$; d'où l'on voit que chaque ordonnée $\omega\mu$ ou z de la courbe $\zeta\mu\varphi$ eſt en raiſon inverſe de la viteſſe θq du point ω ſuivant ωD, & qu'ainſi le fluide ſe meut dans l'eſpace $DC\zeta\varphi$, comme il feroit dans un vaſe infiniment étroit.

Or quand une maſſe donnée de fluide $C\zeta\varphi D$ ſe meut dans un tel vaſe, & qu'après le tems t elle parvient de la ſituation $C\zeta\varphi D$ dans la ſituation $C'\zeta'\varphi' D'$, on peut avoir facilement par les méthodes que j'ai expliquées dans mon *Traité des Fluides*, Art. 100 & 101, une équation entre t, & CC' que je nomme ξ; de plus on a par l'équation de la courbe BMF, la valeur de Γx; par conſéquent celle de φx; par conſéquent celle de q en $\varphi\xi$; par conſéquent celle de q en t, puiſqu'on a la valeur de ξ en t; enfin on a $dt = \frac{d\xi}{\theta q}$, ou $\theta = \frac{d\xi}{q\,dt}$; donc ſubſtituant pour ξ ſa valeur en t, dans le ſecond membre de cette équation, on aura la quantité cherchée θ, au moins par les quadratures.

VII.

Puiſque $dt = \frac{dx}{q\theta}$, on aura $\theta\, dt = \frac{dx}{q}$; c'eſt pourquoi cherchant ſur les courbes $\mathfrak{C}\mu\varphi$, bmf, BMF &c. les points $\mathfrak{C}'$, K, R &c. où la quantité $\int \frac{dx}{q}$ ſoit la même, on aura la courbe $C'KR$ que la ſurface du fluide forme à chaque inſtant; & l'équation de cette courbe $C'KR$ ſera $\int \frac{dx}{q} = \int \theta\, dt$.

Pour avoir cette équation exprimée en coordonnées rectangles CN, x, & NK, s, on mettra dans q, au lieu de z ſa valeur exprimée par x & par la conſtante Cb, qu'on a appellée $\mathfrak{C}$; cette valeur ſe tirera de l'équation de la courbe bmf, qui eſt $\Gamma(x + z\sqrt{-1}) - \Gamma(x - z\sqrt{-1}) = \Gamma\mathfrak{C}\sqrt{-1} - \Gamma - \mathfrak{C}\sqrt{-1}$: on intégrera enſuite la quantité $\int \frac{dx}{q}$, en regardant $\mathfrak{C}$ comme conſtant, & x comme variable; enfin dans l'intégrale on remettra au lieu de $\mathfrak{C}$ ſa valeur en x & en z; & à la place de z on mettra s qui lui eſt égale, & qui n'en differe qu'en ce que s repréſente l'ordonnée NK dans la courbe $C'KR$, & z la même ordonnée NK dans la courbe bKF; ainſi on aura l'équation de la courbe $C'KR$, dont le premier membre ſera une fonction connue de x & de s, & le ſecond ſera $= \int \theta\, dt$, & par conſéquent = à une fonction de t; enſorte que s pourra être ici regardé comme le parametre de la courbe $C'KR$,

laquelle change de place & de forme à chaque instant.

VIII.

Mais cette courbe $C'KR$ doit avoir encore une autre propriété; c'est que la force perdue par chaque particule K doit être perpendiculaire à cette courbe en K; d'où l'on tire, comme il résulte de l'Art. 152 de l'Ouvrage cité, l'équation $-\frac{ds}{dx} = \frac{g - qT - Aq\theta - Bp\theta}{-pT - A'q\theta - B'p\theta}$, T étant supposé $= \frac{d\theta}{dt}$; & par conséquent (si on met pour B sa valeur A' ou $\frac{dp}{dx}$, & pour A' sa valeur B ou $\frac{dq}{dz}$, enfin pour A & pour B' leurs valeurs $\frac{dq}{dx}$ & $\frac{dp}{dz}$) on aura $g\,dx = T(p\,ds + q\,dx) + \theta\left(\frac{q\,dq}{dx}dx + \frac{p\,dp}{dx}dx + \frac{q\,dq}{dz}ds + \frac{p\,dp}{dz}ds\right)$. Donc comme z est ici égal à s, on aura $gx + \vartheta = T\int p\,ds + q\,dx + \frac{\theta}{2}(qq + pp)$, ϑ étant une fonction indéterminée de t; on remarquera de plus, que la quantité $\int p\,ds + q\,dx$ est intégrable (§. I.), & peut être représentée par une fonction de x & de s, puisque $p\,dz + q\,dx$ est intégrable, comme on l'a vû ci-dessus.

Pour trouver la fonction ϑ, on observera qu'au point C' on a $z = o$, & par conséquent $s = o$, $x = \xi$, & $\xi =$ à une fonction connue de t; c'est pourquoi mettant dans l'équation

l'équation ci-dessus (après avoir intégré $p\,ds + q\,dx$), au lieu de x la valeur de ξ en t, & effaçant les termes où s se trouve, on aura la valeur de ϑ exprimée en t.

IX.

Il faut que cette nouvelle équation de la surface courbe $C'KR$ s'accorde avec celle qui a été trouvée précédemment §. VII. Si elles sont différentes, & si l'une ne peut être réduite à l'autre, c'est une marque que la solution analytique du Problême est impossible.

Ce n'est pas tout; ce que nous avons dit de la surface supérieure, doit avoir lieu de même pour la surface inférieure; nouvelles conditions qui limitent encore davantage la solution du Problême.

Enfin, il faut encore que les forces perdues soient dirigées de haut en bas dans la surface supérieure, & de bas en haut dans l'inférieure, pour que l'équilibre soit possible.

On voit par-là qu'il y a bien peu de cas où l'on puisse trouver analytiquement & rigoureusement le mouvement d'un fluide dans un vase, même en faisant abstraction du frottement & de la ténacité des parties du fluide. On peut donc s'en tenir, ce me semble, dans le plus grand nombre des cas, à la méthode que j'ai donnée dans mon *Traité des Fluides*, laquelle fournit des résultats assez conformes à l'expérience, quoiqu'elle ne soit pas dans la rigueur Mathématique.

X.

Dans le §. I. ci-deſſus, nous avons fait voir que l'équation $\frac{d(qT)}{dz} = \frac{d(pT)}{dx}$, devoit avoir lieu; & qu'ainſi $A' = B$; il n'y a qu'un ſeul cas où cette équation ne ſoit pas indiſpenſable, c'eſt celui où T ſeroit $= \theta$, c'eſt-à-dire où θ ſeroit $= ac^t$, a étant une quantité quelconque; car alors faiſant diſparoître les quantités θ & T de l'équation $\frac{d(g - B\theta p - A\theta q - qT)}{dz}$ $= \frac{d(-\theta q A' - \theta p B' - pT)}{dx}$, & ſimplifiant d'ailleurs cette équation, on auroit $\frac{d(Bp + Aq + q)}{dz}$ $= \frac{d(A'q + B'p + p)}{dx}$: d'où l'on tire $\frac{p\,dq}{dz}dx + \frac{q\,dq}{dx}dx + q\,dx + \frac{q\,dp}{dx}dz + \frac{p\,dp}{dz}dz + p\,dz$ = à une différentielle complette; & retranchant de cette quantité $\frac{q\,dq}{dx}dx + \frac{q\,dq}{dz}dz + \frac{p\,dp}{dx}dx + \frac{p\,dp}{dz}dz$ qui eſt auſſi une différentielle complette, on aura $(p\,dx - q\,dz)\left(\frac{dq}{dz} - \frac{dp}{dx}\right) + q\,dx + p\,dz$ = à une différentielle complette. De plus, comme $B' = -A$, on a auſſi $p\,dx - q\,dz =$ à une différentielle complette.

XI.

De-là il s'enſuit, que quand le tems t entre dans l'ex-

preſſion de la viteſſe du fluide, le ſeul cas où il ne ſoit pas néceſſaire que $p\,dz + q\,dx$ ſoit une différentielle en même-tems que $p\,dx - q\,dz$ (qui l'eſt toujours néceſſairement) eſt celui où θ feroit $= a\,c^t$; or ce cas ne peut jamais avoir lieu que dans l'hypothèſe où le fluide auroit reçu une impulſion primitive; car dans tout autre cas, où le fluide ſe mouvroit par ſa ſeule peſanteur, ou par d'autres forces accélératrices quelconques, ſa viteſſe ſeroit $= o$ lorſque t ſeroit $= o$; ainſi θ ne pourroit être $= a\,c^t$.

Il ne ſuffit pas que l'impulſion donnée ſoit telle que $\theta = a\,c^t$; il faut encore que les quantités p & q ſoient telles, que $p\,dx - q\,dz$ & $(p\,dx - q\,dz)\left(\frac{dq}{dz} + \frac{dp}{dx}\right) + p\,dz + q\,dx$, ſoient l'une & l'autre des différentielles complettes.

Il faut de plus que les autres conditions énoncées dans les §. VII, VIII & IX. ſoient obſervées; ce qui limite encore le nombre des cas où l'équation $A' = B$, n'a pas néceſſairement lieu, & ce qui rendra peut-être ces cas abſolument impoſſibles, ſi toutes les conditions énoncées ci-deſſus ne peuvent avoir lieu à la fois; queſtion de pur calcul que je laiſſe à examiner à d'autres.

XII.

Il eſt au moins certain par tout ce qu'on vient de dire, que toutes les fois qu'un fluide ſera mû par la ſeule

impulsion de sa pesanteur, ce qui est le cas le plus ordinaire, il faudra nécessairement que $p\,dx - q\,dz$, & $p\,dz + q\,dx$ soient chacune des différentielles complettes, pour que le mouvement du fluide puisse être soumis au calcul analytique.

Lorsque le fluide a une masse finie & un mouvement progressif, il est évident que le tems t doit entrer dans l'expression de sa viteſſe, puisque la viteſſe de chaque particule dépendra non-seulement de sa situation, mais encore du tems qu'il y a que le fluide est en mouvement. Si le fluide étoit indéfini, & qu'on supposât son mouvement arrivé à un état constant, alors t n'entreroit plus dans l'expression de la viteſſe; mais on sent bien que l'hypothèse d'un fluide indéfini, qui se meut dans un vase de figure donnée, n'a point lieu dans la nature, & qu'ainsi cette hypothèse est plus Mathématique que Physique.

Il n'y a donc que le cas où le fluide se meut suivant une ligne qui rentre en elle-même, sans être animé par aucune force accélératrice, dans lequel on puisse supposer que t n'affecte point l'expression de la viteſſe. Dans ce cas $\theta = 1$, $T = o$; & l'on aura $\frac{d(Bp + Aq)}{dx} = \frac{d(A'q + B'p)}{dx}$; d'où l'on tire par la même méthode que ci-dessus $(p\,dx - q\,dz) + \left(\frac{dq}{dz} - \frac{dp}{dx}\right) =$ à une différentielle complette. Or on a déja $p\,dx - q\,dz =$ à une différentielle complette $K\,db$, b étant supposé le

parametre de chaque courbe, & K une fonction de b; donc $K db \left(\frac{dq}{dz} - \frac{dp}{dx} \right)$ doit être une différentielle complette; donc $\frac{dq}{dz} - \frac{dp}{dx}$ doit être une fonction de b. D'où l'on voit que le parametre b étant conſtant pour chaque courbe que les particules du fluide décrivent, on doit avoir pour chacune de ces courbes $d\left(\frac{dq}{dz}\right) = d\left(\frac{dp}{dx}\right)$. Or ſi on ſuppoſe que $\omega = \alpha$ ſoit l'équation générale de ces courbes; on aura $p\,dx - q\,dz = o$ pour la différentielle de cette équation; & par conſéquent $p = \frac{d\omega}{dx}$, & $q = \frac{-d\omega}{dz}$; donc $\frac{ddw}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$; & $\frac{-ddw}{dz^2} = \frac{dq}{dz}$; donc $d\left(\frac{ddw}{dx^2}\right) = d\left(\frac{-ddw}{dz^2}\right)$; & cette équation doit appartenir à la même courbe que l'équation $\omega = \alpha$; ſinon la ſolution du Problême eſt impoſſible.

Pour trouver les cas où les équations $\omega = \alpha$, & $d\left(\frac{d^3\omega}{dx^3}\right) = d\left(\frac{-ddw}{dz^2}\right)$ appartiendront à la même courbe, on conſidérera que la premiere donne $\frac{dw}{dx}dx + \frac{dw}{dz}dz = o$, & que la ſeconde donne

(*) $\frac{d^3\omega}{dx^3}dx + \frac{d^3\omega}{dx^2dz}dz + \frac{d^3\omega}{dz^2}dz + \frac{d^3\omega}{dz^2dx}dx$

(*) Dans cette équation & dans la ſuivante $\frac{d^3\omega}{dx^3}$ eſt le coëfficient

$= o$; donc mettant pour dx & dz dans les numérateurs leurs proportionnelles $\frac{-d\omega}{dz}$, $\frac{d\omega}{dx}$, on aura l'équation en termes finis $\frac{-d^2\omega}{dx^2} \times \frac{d\omega}{dz} + \frac{d^2\omega}{dx\,dz} \times \frac{d\omega}{dx} + \frac{d^2\omega}{dz^2} \times \frac{d\omega}{dx} - \frac{d^2\omega}{dz^2\,dx} \times \frac{d\omega}{dz} = o$: or cette équation doit être néceſſairement identique, c'eſt-à-dire, telle que tous les termes ſe détruiſent mutuellement; car ſi cela n'étoit pas, cette équation ne pourroit s'accorder, comme il eſt néceſſaire, avec l'équation $\omega = \alpha$; 1°. parce que cette derniere équation renferme le parametre variable b qui n'eſt point dans l'autre; 2°. parce que ſi l'équation trouvée n'étoit pas identique, elle donneroit pour chaque x une valeur de z déterminée, & non pas variable, comme il eſt néceſſaire; donc la condition qu'on cherche, eſt renfermée dans l'*identité* de l'équation qu'on vient de trouver, c'eſt-à-dire dans la deſtruction mutuelle de tous les termes de cette équation.

Perſonne, que je ſache, n'avoit encore remarqué, que le cas où le fluide ſe meut ſuivant des lignes rentrantes en elles-mêmes, eſt le ſeul où l'équation $A' = B$ n'ait

---

de dx^2 dans la différentielle $d^2\omega$; $\frac{d^2\omega}{dx^2\,dz}$ eſt le coëfficient de $dx^2\,dz$ dans la même différentielle, $\frac{d\omega}{dz}$ eſt le coëfficient de dz dans la différentielle $d\omega$, &c. & ainſi du reſte.

pas lieu. Dans mon *Eſſai ſur la réſiſtance des fluides*, je n'ai fait mention que des cas où $A' = B$, parce que je ne conſidérois alors que le mouvement progreſſif des fluides. Perſonne n'avoit remarqué non plus, que dans le cas où A' n'eſt point néceſſairement $= B$, on a toujours néceſſairement $dA' = dB$, ni aſſigné les cas où cette équation eſt poſſible.

XIII.

Donc en général, quand un fluide ſe meut dans un vaſe quelconque, il faut, pour pouvoir réduire le mouvement de ce fluide à un calcul analytique; 1°. que $\frac{dp}{dz} = \frac{-dq}{dx}$, & cette condition a lieu dans tous les cas poſſibles; 2°. que $\frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dz}$, ou que $d\left(\frac{dp}{dx}\right) = d\left(\frac{dq}{dz}\right)$. Cette dernière condition $d\left(\frac{dp}{dx}\right) = d\left(\frac{dq}{dz}\right)$, n'a lieu que dans le cas où le fluide ſe meut ſuivant des courbes rentrantes en elles-mêmes, & n'eſt point ſollicité à ce mouvement par des forces accélératrices, enſorte que la viteſſe de chaque particule ne dépend abſolument que de ſa poſition.

Il eſt à remarquer de plus, & c'eſt une ſuite de toute la théorie précédente, que dans les cas où l'équation $\frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dz}$ doit avoir lieu, cette équation doit être identique, c'eſt-à-dire que les deux membres doivent

être parfaitement semblables ; au lieu que l'équation $d\left(\frac{dp}{dx}\right) = d\left(\frac{dq}{dx}\right)$ ne doit point être nécessairement identique, mais seulement doit se rapporter à la même courbe que l'équation $p\,dx - q\,dz = o$, qui est l'équation de chacune des courbes décrites par les particules du fluide. D'où il s'ensuit, comme on l'a vû, que l'équation $d\left(\frac{dp}{dx}\right) = d\left(\frac{dq}{dz}\right)$ transformée en $\frac{d^2p}{dx^2}\cdot q + \frac{d^2p}{dx\,dz}\cdot p = \frac{d^2q}{dx^2}\cdot q + \frac{d^2q}{dx\,dz}\cdot p$, ou, ce qui est encore la même chose, $q\frac{d\,d(p-q)}{dx^2} + p\frac{d\,d(p-q)}{dx\,dz} = o$, doit être identique.

XIV.

Voilà pour ce qui concerne le mouvement d'un fluide dans un vase ; passons à ce qui regarde le mouvement des fleuves, ou en général des fluides qui coulent sur une surface donnée. Je supposerai pour plus de simplicité, que le fluide soit indéfini, que son mouvement soit parvenu à un état permanent, & que ce mouvement se fasse dans un même plan ; cela posé, si on nomme q la vitesse verticale, & p la vitesse horizontale, on aura, comme ci-dessus, & par les mêmes raisons, $\frac{dp}{dz} = \frac{-dq}{dx}$; & $p\,dx - q\,dz = o$ sera, ou devra être l'équation de la surface sur laquelle le fluide coule, &

& celle de toutes les courbes que les particules du fluide décrivent. On trouvera de plus, comme ci-dessus, que l'équation $-\frac{q\,d^2p}{dx^2}+\frac{p\,d^2p}{dx\,dz}=\frac{q\,d^2q}{dx^2}+\frac{p\,d^2q}{dx\,dz}$ doit être identique.

Telles sont les équations qui représentent le mouvement du fluide, dans l'hypothèse purement mathématique, que le fluide soit indéfini; car si on suppose, ce qui est plus conforme à la nature, que ce fluide reçoive son mouvement d'un réservoir placé à une certaine distance, & entretenu toujours à la même hauteur; alors, comme la vitesse du fluide à la surface du réservoir est nulle, on prouvera par une méthode précisément semblable à celle dont nous nous sommes servis p. 46 de notre *Essai sur la résistance des fluides*, que $\frac{dp}{dz}=\frac{dq}{dx}$; ainsi la condition que $p\,dx-q\,dz$, & $p\,dz+q\,dx$ soient des différentielles complettes, aura encore lieu ici.

Mais quand on voudroit se borner à la seule condition, que $p\,dx-q\,dz$ soit une différentielle complette, & que $\frac{q\,d\,dp}{dx^2}+\frac{p\,d\,dp}{dx\,dz}=\frac{q\,d\,dq}{dx^2}+\frac{p\,d\,dq}{dx\,dz}$ soit une équation identique; il y auroit encore une autre condition à remplir; savoir que la force perdue soit perpendiculaire à la surface du fluide; pour cela, nommant x & y les coordonnées AP & PM (*fig.* 25.), on remarquera que la force perdue verticalement est $g-pB-Aq$, & que la force perdue horizontalement suivant

PM ou MR eſt $-pB'-Aq'$; mais comme cette force doit être ici dirigée de M vers P, afin que la force perdue ſoit perpendiculaire à la ſurface CM, il faudra la ſuppoſer $=pB'+A'q$; & la condition de la perpendicularité donnera $\frac{dy}{dx}=\frac{g-pB-Aq}{+pB'+A'q}$, ou $\frac{pdp}{dy}dy+\frac{qdq}{dy}dy+\frac{pdp}{dx}dx+\frac{qdq}{dx}dx=gdx$; d'où l'on tire $A+2gx=pp+qq$. Dans cette équation $pp+qq$ exprime le quarré de la viteſſe à la ſurface, & l'on voit que le quarré de cette viteſſe eſt $=A+2gx$, c'eſt-à-dire, qu'elle eſt la même que ſi chaque particule deſcendoit librement ſur cette ſurface en vertu de ſa peſanteur. C'eſt d'ailleurs ce qu'on peut voir aiſément *à priori*; car la force perdue étant toujours perpendiculaire à la courbe, chaque particule du fluide deſcend de la même maniere que ſi elle deſcendoit librement ſur une ſurface ſolide.

Il faut que l'équation $A+2gx=pp+qq$ ſe rapporte à la même courbe que l'équation $pdx-qdy=o$. Ainſi les conditions qui doivent déterminer les quantités p & q ſont; 1°. que $pdx-qdz$, & $pdz+qdx$ ſoient des différentielles complettes; 2°. qu'en faiſant $z=y$, les équations $pdx-qdy=o$, & $gdx=pdp+qdq$, appartiennent à la même courbe.

XV.

Nous avons ſuppoſé juſqu'ici que le fluide ſe mou-

voit dans un plan; mais s'il se meut suivant des surfaces courbes quelconques, en ce cas on supposera que θq soit sa viteſſe verticale, θp & $\theta \omega$ ſes deux viteſſes horizontales, perpendiculaires l'un à l'autre; (car on peut démontrer, par un raiſonnement ſemblable à ceux de la théorie précédente, que telles doivent être les expreſſions des viteſſes, q étant une fonction de x, z & s, ainſi que p & ω). On trouvera de plus, par une méthode exactement ſemblable à celle de l'Ouvrage déja cité, en conſidérant des parallélépides rectangles au lieu de parallélogrammes rectangles, & ſuppoſant

$$dq = A\,dx + B\,dz + C\,ds$$
$$dp = A'dx + B'dz + C'ds$$
$$d\omega = A''dx + B''dz + C''ds;$$

1°. que $A + B' + C'' = o$, ou, ce qui eſt la même choſe, $\frac{dq}{dx} + \frac{dp}{dz} + \frac{d\omega}{ds} = o$; 2°. que $\frac{d(g - \theta Aq - B\theta p - qT)}{dz} = \frac{d(-\theta A'q - \theta pB' - pT)}{dx}$; d'où l'on tire, comme dans le §. I. ci-deſſus, $\frac{dq}{dz} = \frac{dp}{dx}$, ou $B = A'$; & cette condition, avec celle qui vient d'être trouvée $A + B' + C'' = o$, ſatisfera au reſte de l'équation; on trouvera de même $\frac{d(g - \theta Aq - \theta C\omega - qT)}{ds} = \frac{d(-\theta A''q - \theta C''\omega - \omega T)}{dx}$; d'où l'on tire par un raiſonnement ſemblable $A'' = C$; enfin on aura par la même raiſon $B'' = C'$; donc $\frac{dp}{dz}$

$= \frac{dq}{dz}$; $\frac{d\omega}{dx} = \frac{dp}{ds}$; $\frac{d\omega}{dz} = \frac{dq}{ds}$; donc $p\,dx + q\,dz + \omega\,ds$ eſt une différentielle complette.

Donc on aura les trois équations

$$dp = A\,dx + B\,dz + C\,ds$$
$$dq = B\,dx + B'\,dz + C'\,ds$$
$$d\omega = C\,dx + C'\,dz - A\,ds - B'\,ds.$$

Il faudra de plus, lorſque z devient y, que $p\,dx - q\,dy = 0$; $p\,ds - \omega\,dy = 0$; $q\,ds - \omega\,dx = 0$.

Voilà les équations qui ſerviront à déterminer le mouvement du fluide, & qui ſont ſuſceptibles de remarques analogues à celles qui ont été faites précédemment pour le cas de $\omega = 0$, $C = 0$, & $C' = 0$, lorſque le fluide ſe meut dans un plan.

XVI.

Il eſt aiſé de voir par toute la théorie expliquée dans ce Mémoire, que le mouvement des fluides peut rarement être ſoumis à un calcul analytique rigoureux, ſi même il y a des cas où il le puiſſe être. Mais on peut toujours démontrer la conſervation des forces vives dans une maſſe fluide, qui ſe meut ſuivant une loi quelconque. En effet dans le cas où les particules du fluide ſe meuvent ſuivant des lignes courbes invariables, on peut regarder le fluide, contenu entre deux quelconques de ces lignes courbes infiniment proches l'une de l'autre; comme s'il ſe mouvoit dans un tuyau iſolé, de figure quelconque & infiniment étroit; or les principes établis dans notre *Traité des fluides*, ſuffiſent pour faire voir

très-aiſément que la conſervation des forces vives aura lieu pour le fluide contenu dans un pareil tuyau.

Si les particules du fluide ne décrivent pas des courbes invariables, en ce cas qu'on imagine depuis la ſurface ſupérieure du fluide CK (*fig.* 26.) juſqu'à l'inférieure LO, une ſuite de points infiniment proches, dont les viteſſes forment par leurs directions une courbe continue KGO: ſoient imaginées de plus des perpendiculaires Gg à cette courbe, leſquelles ſoient entr'elles en raiſon inverſe de la viteſſe en chaque point G; il eſt certain qu'on pourra, au moins dans cet inſtant, regarder le fluide comme s'il ſe mouvoit dans le tuyau infiniment mince $KGO\,o\,k$; ainſi la conſervation des forces vives pourra encore ſe démontrer dans cette hypothèſe par les mêmes principes. En effet faiſant abſtraction (pour ſimplifier le calcul) de toute force accélératrice, & nommant KG, s, la viteſſe en G, v, & Gg, ζ; on aura $\int d\,s\,d\,v = o$, ou $\int \zeta\,d\,s \,.\, v\,d\,v = o$; & comme rien n'empêche de ſuppoſer que la maſſe $\zeta\,d\,s$ de chaque particule du fluide ne demeure la même pendant tout le tems du mouvement, quoique cette maſſe change ou puiſſe changer à chaque inſtant de figure & de tuyau, il s'enſuit &c.

Cette derniere Propoſition eſt démontrée d'une autre maniere dans mon *Traité de l'Equilibre & du mouvement des fluides*, Liv. II. Chap. 2; mais on y ſuppoſe que la viteſſe verticale ſoit la même dans tous les points d'une même tranche horizontale, & qu'on n'ait

aucun égard à la viteſſe horiſontale de ces mêmes points? Or ces deux ſuppoſitions n'étant pas rigoureuſement vraies, quoique les conſéquences qui en réſultent ſoient aſſez conformes à l'expérience, j'ai cherché depuis une méthode plus rigoureuſe pour déterminer les loix du mouvement des fluides; c'eſt la méthode expoſée dans cet Ecrit. J'en envoyai un eſſai à l'Académie des Sciences de Pruſſe, à la fin de 1749, & je le publiai depuis en 1752, dans mon *Eſſai ſur la réſiſtance des fluides*, long-tems avant que perſonne eût rien donné de ſemblable. De très-grands Géometres ont fait aſſez de cas de cette méthode pour l'appliquer à la même recherche. Ils ont cherché à la généraliſer, ce qui étoit, j'oſe le dire, très-facile, après les Eſſais que j'en avois publiés. Ils paroiſſent de plus avoir cru que les équations que j'ai données du mouvement des fluides, étoient trop limitées; je crois avoir prouvé le contraire dans cet Ecrit, & je me flatte même d'avoir tiré de ma théorie d'autres conſéquences qui ont échappé à ces Géometres, ou ſur leſquelles ils me ſemblent avoir été dans l'erreur.

XVII.

Si un fluide ſe meut dans un tuyau de figure quelconque *ABFE* (*fig.* 23.); nous avons déja obſervé qu'il falloit que la courbure des parois *AE*, *BF*, fût exprimée par une certaine équation, pour que le mouvement de ce fluide pût être aſſujetti aux loix analytiques. C'eſt

aussi dans cette seule hypothèse qu'on peut déterminer analytiquement la pression que le fluide exerce en un point quelconque N des parois du vase; car nommant AN, s, φ la force accélératrice en N, & v la viteſſe, on aura $\int ds \left(\varphi - \frac{dv}{dt}\right)$ pour la pression exercée au point N perpendiculairement à la courbe AN; nous avons donné dans le Chap. III. de notre *Eſſai ſur la réſiſtance des fluides*, Paris 1752, la méthode de trouver pour chaque point N cette pression, que je nomme P. Or cette pression produira dans le sens horizontal, ſuivant PN, une force $= \int P\,dx$; & dans le sens vertical une force $= \int P\,dy$. On trouvera la même choſe pour l'autre paroi BMF; d'où l'on voit que ſi les forces verticale & horizontale, réſultantes des pressions contre les deux parois, ne ſe détruiſent pas mutuellement, la pression du fluide contre les parois du vaſe tendra à mouvoir le vaſe dans le sens vertical, ou dans le sens horizontal, ou dans tous les deux à la fois.

C'eſt pourquoi ſi un vaſe eſt formé, par exemple, de deux parois qui ſoient concaves toutes les deux d'un même côté en forme de tuyau recourbé, il eſt aiſé de voir qu'on pourra déterminer géométriquement l'action du fluide ſur le vaſe pour le mouvoir dans un certain sens; mais cela ne ſe poutra que quand la courbure des parois ſera aſſujettie à une équation telle qu'elle a été fixée dans les recherches précédentes. Or quand un fluide s'échappe horizontalement d'un vaſe vertical par une

ouverture verticale faite à l'un des parois de ce vaſe, il eſt certain qu'on peut regarder ce fluide, ou une grande partie du moins de ce fluide, comme ſe mouvant dans une eſpece de tuyau recourbé; mais la figure de ce tuyau ne pouvant être aſſujettie aux loix ci-deſſus, il paroît s'enſuivre qu'on ne peut déterminer par la théorie que d'une maniere fort imparfaite la preſſion qu'un pareil fluide exerce ſur la partie du vaſe oppoſée à celle par laquelle il ſort.

XVIII.

A l'occaſion de cette preſſion que les fluides exercent horizontalement contre les vaſes dans leſquels ils coulent, je dirai ici un mot de leur preſſion verticale, dont j'ai parlé dans mon *Traité des fluides*, Art. 146 & ſuiv. J'ai obſervé dans l'Art. 149, que quand la valeur de cette preſſion eſt négative, M. Daniel Bernoulli prétend qu'elle ſe change en ſuction, c'eſt-à-dire, que les parois du vaſe ſont preſſés de dehors en dedans; j'ai propoſé là-deſſus mes objections, qui ſont bien ſimples, & qui ſont même ſans replique, lorſqu'on fait abſtraction de la preſſion de l'air environnant, comme je le faiſois alors. On prétend que M. Bernoulli, dans l'endroit de ſon Hydrodynamique qui eſt l'objet de cette remarque, ne fait pas la même abſtraction que moi; en ce cas nous avons raiſon tous deux; mais ce qui m'a fait croire que M. Bernoulli n'avoit point penſé à l'air environnant, c'eſt que dans l'endroit dont il s'agit, il n'en parle point; il

il dit ſimplement, *latera canalis introrsùm premuntur*, ſans ajouter *ab aere ambiente*, ce qui auroit levé toute équivoque.

Il y a plus; au lieu de ces trois mots qui euſſent expliqué ſon idée avec la plus grande clarté, il ajoute une réflexion qui ne fait, ce me ſemble, que l'obſcurcir; *la preſſion*, dit-il, *ſe change en ſuction, c'eſt-à-dire, les parois du vaſe ſont preſſées de dehors en dedans*; *ce qu'il faut entendre de la même maniere, que ſi au lieu d'une colomne qui peſeroit de haut en bas, il y avoit dans une branche verticale contigue au tuyau, une colomne d'eau ſuſpendue, dont l'effort pour deſcendre fût arrêté par l'eau qui coule dans le tuyau*; il me ſemble que cette eſpece de comparaiſon eſt beaucoup moins nette & moins juſte que les trois mots que M. Bernoulli a omis, & qui, à mon avis, étoient eſſentiels en cet endroit, pour ne point expoſer les Lecteurs à prendre le change.

Quoi qu'il en ſoit, je n'ai jamais combattu ni penſé à combattre les expériences qu'il rapporte à ce ſujet, parce que ces expériences s'expliquent très-aiſément, dans ma théorie comme dans la ſienne, par la preſſion de l'air environnant; & qu'en admettant cette preſſion, il n'y a plus aucune difficulté entre nous, du moins ſi on ſuppoſe que l'air qui environne le tuyau, ſoit tranquille. Car ſi cet air eſt en mouvement, comme il l'eſt en effet, alors ce mouvement altérant la preſſion de l'air ſur les parois extérieures du vaſe, elle pourra n'être plus la même que ſi l'air étoit abſolument tranquille;

il ſeroit même fort difficile de déterminer aſſez exactement cette preſſion par la théorie. Cependant je crois qu'en général, & à l'exception peut-être de quelques cas ſinguliers, la preſſion de l'air contre le vaſe ſera à-peu-près la même que ſi l'air étoit tranquille; par la raiſon que la portion d'air qui eſt en mouvement autour du vaſe, eſt très-petite par comparaiſon à la maſſe totale de l'atmoſphere.

Je devois à mes Lecteurs cet éclairciſſement ſur les théories que M. Daniel Bernoulli & moi avons données de la preſſion des fluides en mouvement, & qui ſont parfaitement d'accord, lorſqu'on aura égard à la preſſion de l'air qui environne le vaſe.

Il n'en eſt pas de même de l'application du principe de la conſervation des forces vives au mouvement des fluides; nous différons eſſentiellement ſur ce point M. Bernoulli & moi. Je crois avoir montré dans mon *Traité des fluides*, que ce principe ne s'applique pas indiſtinctement à tous les cas, mais qu'il a lieu ſeulement dans ceux où la viteſſe du fluide & de ſes parties change à chaque inſtant par degrés infiniment petits, & non dans ceux où cette viteſſe acquiert en un inſtant une valeur finie. *Voyez* les Art. 94, 123 & 143 du *Traité des fluides* déja cité.

XIX.

Je finirai ces recherches ſur le mouvement & la preſſion des fluides, par quelques réflexions ſur la ma-

tière de déterminer l'action des rames. La plûpart des Auteurs qui en ont traité, les rapportent à des leviers de différente eſpéce; en quoi il ſemble qu'ils n'ont pas enviſagé la queſtion par ſes vrais principes; puiſqu'il n'y a pas réellement de levier, où il n'y a pas de point d'appui abſolument fixe & immobile. Voici donc quelle idée on doit ſe former de l'action des rames, d'après nos principes de Dynamique. Pour enviſager la queſtion dans toute ſa généralité, nous ſuppoſerons que le vaiſſeau, la rame & la puiſſance motrice ſoient mûs ſuivant une loi quelconque. Cela poſé, la force perdue à chaque inſtant par le vaiſſeau, jointe à la preſſion du fluide contre le vaiſſeau, doit être en équilibre avec la force perdue à chaque inſtant par la puiſſance motrice, & avec la force perdue par la rame, jointes à la réſiſtance de l'eau à la rame. Or pour cela, il faut; 1°. que la force perdue à chaque inſtant par la puiſſance motrice, la force perdue par la rame, & enfin la réſiſtance de l'eau à la rame, ſe réduiſent à une ſeule & unique force dont la direction paſſe par le point où la rame eſt attachée au vaiſſeau; car ſi la direction de cette force réſultante paſſoit par un autre point de la rame, alors elle pourſoit mouvoir la rame autour du point par lequel la rame eſt attachée au vaiſſeau, & il n'y auroit pas d'équilibre; ce qui eſt contre l'hypothèſe. 2°. Cette force réſultante, ou plutôt la réſultante des deux forces qui paſſent par le point d'appui de chaque rame, des deux côtés du vaiſſeau, doit être en équilibre avec la force perdue

par le vaiſſeau, & avec la preſſion de l'eau ſur la ſurface du vaiſſeau; c'eſt-à-dire, que la réſultante de ces deux dernieres forces doit être égale & directement oppoſée à la réſultante des deux autres forces. Tel eſt le principe par lequel on peut ſe faire une idée nette & préciſe de l'action des rames, & de la maniere dont elles ſervent à mouvoir les navires.

Pour fixer les idées ſur cette matiere, je regarde le vaiſſeau comme une ligne AB. (*fig.* 27.), & la rame FCG comme une autre ligne, mobile autour du point fixe C. Cela poſé, conſidérons d'abord le navire au premier inſtant de ſon mouvement. Je regarde la main appliquée en F comme un corps M qui tend à ſe mouvoir avec la viteſſe a, mais qui ayant le vaiſſeau & la rame à mouvoir, ne gardera réellement que la viteſſe z; de ſorte que $M(a-z)$ ſera la force perdue par la main. Maintenant ſi on ſuppoſe que la main ſe meut de F vers A, le vaiſſeau, ainſi que le point C de la rame, ſe mouvra de B vers A avec une viteſſe $= u$, & le point F de la rame ſe mouvra vers A avec une viteſſe $= z$. Donc ſi on imprime à tout le ſyſtême du vaiſſeau & de la rame, des mouvemens égaux & contraires, il faudra que ces mouvemens faſſent équilibre avec la force $M \times (a-z)$ perdue par la force motrice. Donc ſi on nomme g la ſomme des produits des parties de la rame par leurs diſtances à C, h le coſinus de l'angle FCO (CO étant perpendiculaire à AB), G la ſomme des produits des parties de la rame par le quarré de

leurs distances à C, μ la masse du vaisseau, m celle de la rame; on aura les deux équations suivantes pour le premier instant du mouvement;

$$1^{\circ}.\ M(a-z)\times FC-\frac{G\cdot x}{FC}-g\cdot u\cdot h=0;$$

$$2^{\circ}.\ M(a-z)h-\frac{2\cdot g\cdot k}{FC}-m\cdot u=\mu\cdot u;$$

Soit $FC=r$, $CG=p$, on aura les équations $g=\frac{r^2-p^2}{2}$; $G=\frac{r^2+p^2}{3}$; & substituant ces valeurs, il viendra deux équations qui donneront les valeurs de u & de z, au premier instant du mouvement.

Dans les instans suivans on suppose que le vaisseau soit parvenu à une viteſſe uniforme; & on demande quelle est la loi de la viteſſe de la puiſſance F, pour entretenir le vaisseau dans cette viteſſe.

Soit X l'eſpace parcouru par la puiſſance F depuis le commencement du mouvement; la viteſſe inſtantanée de cette puiſſance, ou plutôt de la maſſe M, ſera $\frac{dX}{dt}$; ſoit de plus $M.p'$ l'accroiſſement inſtantané que doit recevoir la force F pour maintenir le vaisseau dans ſon mouvement uniforme; on aura donc $M.p'-\frac{MddX}{dt^2}$ pour la force qui doit être perdue à chaque inſtant au point F, c'eſt-à-dire, qui doit être en équilibre avec les autres forces dont nous allons parler.

Si on nomme p la diſtance de chaque point de la rame

au point C, on trouvera que $-\frac{d\,d\,X \cdot \varrho}{r\,d\,t^2}$ ſera la force perdue à chaque inſtant par chaque point de la rame.

Enfin, comme le point C où la rame eſt attachée, a le même mouvement que le vaiſſeau, & que la rame ſe meut outre cela d'un mouvement de rotation autour de C, chaque point de la partie CG de la rame frappe l'eau à chaque inſtant avec la viteſſe $= u$ ſuivant BA, & de G vers B avec une viteſſe de rotation $= \frac{\varrho\,d\,X}{r\,d\,t}$.

Soit donc γ la réſiſtance de l'eau contre la rame, γ' le moment de cette réſiſtance par rapport au point C, & λ la réſiſtance de l'eau contre le vaiſſeau; on aura les deux équations ſuivantes;

$$\left(Mp' - \frac{M\,d\,d\,X}{d\,t^2}\right)h - \frac{g\,h\,d\,d\,X}{r\,d\,t^2} + \gamma\,h = \lambda$$

$$\left(Mp' - \frac{M\,d\,d\,X}{d\,t^2}\right)r - \frac{G\,d\,d\,X}{r\,d\,t^2} - \gamma' = o.$$

Pour faire uſage de ces équations, il eſt à remarquer; 1°. que la réſiſtance λ eſt donnée par la connoiſſance que l'on a de la viteſſe u; & qu'on peut ſuppoſer cette réſiſtance λ égale à une certaine maſſe μ animée d'une certaine force accélératrice π; 2°. que ſi on nomme A l'angle FCO au premier inſtant, on aura $h = \text{cosinus}\left(A + \frac{X}{r}\right)$; 3°. que chaque point de la partie CG de la rame frappe l'eau avec une viteſſe $= \frac{\varrho\,d\,X}{r\,d\,t} - u\,h$; d'où il réſulte une réſiſtance ſur chaque point, laquelle eſt

proportionnelle à $d\rho\left(\frac{\varrho\, dX}{r\, dt} - uh\right)^2 \times \delta$, δ étant la denſité de l'eau; de maniere que $\gamma = f\delta\, d\rho \times \left(\frac{\varrho\, dX}{r\, dt} - uh\right)^2$; 4°. enfin que le moment de chaque effort par rapport au point C eſt $\rho\, d\rho \times \delta \times \left(\frac{\varrho\, dX}{r\, dt} - uh\right)^2$; d'où il s'enſuit que $\gamma' = f\delta\, \rho\, d\rho \times \left(\frac{\varrho\, dX}{r\, dt} - uh\right)^2 = \frac{\delta\, dX^2}{r^2\, dt^2} \times \frac{p^4}{4} - \frac{2\delta\, dX}{r\, dt} \times \frac{p^3\, uh}{3} + \frac{u^2 h^2 \delta\, p^2}{2}$, en ſuppoſant que la rame foit dans l'eau juſqu'au point C, ou aſſez près de ce point.

On fera ces différentes ſubſtitutions; après quoi chaſſant l'inconnue p', on aura une équation différentielle du ſecond ordre, dans laquelle il n'y aura que X de variable, & dont l'intégration donnera la valeur de X. Cette valeur étant connue, on aura celle de p' par l'une des deux équations.

Je ne m'étends pas davantage ſur cette matiere, parce qu'elle a été ſavamment traitée par M. Euler dans les Mémoires de Berlin de 1747. Je n'ai voulu que montrer ici comment mon principe de Dynamique s'y applique. Il eſt viſible auſſi que les équations ne ſeroient pas plus difficiles à trouver par le même principe, ſi la viteſſe du vaiſſeau, au lieu d'être uniforme, étoit variable.

J'ajouterai que dans le calcul de la réſiſtance de l'eau contre les rames, il faudra (ſi l'on veut faire ce calcul

exactement) avoir égard à une remarque que j'ai déjà faite ailleurs sur la réſiſtance de l'eau contre les aubes des moulins. Voyez le *Traité de l'Equilibre & du mouvement des fluides*, Paris 1754, p. 370 & 371, Art. 367 & 368. Au reſte on n'aura pas beſoin de cette conſidération, ſi on regarde la rame comme une ſurface de peu de largeur, perpendiculaire à l'extrémité de la rame; car alors ρ ſera $= p$, & ſi on nomme k la ſurface de la pale, on trouvera $\gamma = \int k \left(\frac{p\,dX}{r\,dt} - u\,h \right)^2$; & $\gamma' = \int p\,k \left(\frac{p\,dX}{r\,dt} - u\,h \right)^2$, ce qui rendra les équations plus ſimples; on pourra de plus, ſi l'on veut, ſubſtituer dans ces équations, à la place de dX & de ddX, leurs valeurs en h tirées de l'équation $\frac{dX}{r} = \frac{-dh}{\sqrt{1-hh}}$. Mais après toutes ces ſimplifications, l'intégration finale reſtera encore très-difficile.

Fin du quatriéme Mémoire.

CINQUIÉME

CINQUIÉME MÉMOIRE.

Démonſtration du principe de la compoſition des Forces.

M. Daniel Bernoulli a fait voir dans les Mémoires de l'Académie de Peterſbourg, Tome I, que le Problême de la compoſition des forces ſe réduiſoit à prouver, qu'un corps pouſſé ſuivant deux directions quelconques par des forces égales, décriroit la diagonale d'un rhombe, dont les côtés ſeroient les directions de ces forces, & leur ſeroient proportionnels. C'eſt donc cette derniere Propoſition ſeule que nous nous attacherons à démontrer. Ce n'eſt pas que M. Daniel Bernoulli n'ait auſſi prouvé à ſa maniere cette même Propoſition. Mais la méthode qu'il a ſuivie, quoique bonne & ingénieuſe, ne nous paroît, ni auſſi ſimple, ni auſſi rigoureuſe que celle que nous allons donner. 1°. L'Auteur ſe ſert d'un calcul analytique, qui rend quelques-unes de ſes démonſtrations aſſez compliquées, ſur-tout celle de ſa Propoſition VII; au lieu que toutes nos démonſtrations ſeront très-courtes, ſans calcul analytique, & fondées ſur la

Géométrie la plus ſimple. 2°. Le rhombe duquel il part, eſt le quarré; ce qui exige un Théorême de plus, pour prouver qu'un corps pouſſé par deux puiſſances égales qui font un angle droit, doit décrire la diagonale; au lieu que le rhombe dont nous partirons, eſt celui de 120 degrés, dont la démonſtration ſe fait, pour ainſi dire, à l'œil & par la ſeule inſpection de la figure. 3°. M. Bernoulli démontre bien en rigueur la Propoſition dont il s'agit pour tout rhombe dont l'angle ſera à 90 degrés comme nombre à nombre; mais il ne le démontre pour le cas où cet angle ſeroit incommenſurable, qu'en ſuppoſant la diviſion à l'infini. Or quoique cette maniere de démontrer puiſſe être admiſe en Géométrie, on ſent aiſément qu'elle n'eſt pas auſſi rigoureuſe qu'on pourroit le deſirer.

L'écrit qu'on va lire, n'a donc d'autre mérite que de démontrer d'une maniere plus ſimple & plus rigoureuſe, la compoſition des forces dans le cas du rhombe; & je ne me ſuis déterminé à publier cette démonſtration, que par la conſidération de l'utilité dont elle peut être.

PROPOSITION I.

Si trois puiſſances égales agiſſent ſuivant les lignes *AB*, *AC*, *AE* (*fig.* 28.), qui faſſent entr'elles des angles de 120°, il y aura équilibre. Cela eſt évident, puiſqu'il n'y a point de raiſon pour qu'une des puiſſances l'emporte ſur l'autre, étant toutes trois diſpoſées abſolument de la même maniere entr'elles.

COROLLAIRE.

Donc la puiſſance AD réſultante de AB & AC doit être égale à AB ou AC; car cette puiſſance doit être égale & directement contraire à AE. Or l'angle BAC étant de 120°. (*hyp.*), $AD = AB$ eſt la diagonale du rhombe $BADC$. Donc deux puiſſances faiſant entr'elles un angle de 120°. équivalent à une ſeule repréſentée par la diagonale.

PROPOSITION II.

Si deux puiſſances égales repréſentées par AB, AC (*fig.* 29.), font parcourir la diagonale AD du rhombe fait ſur les côtés AB, AC; je dis que ſi on diviſe les angles BAG, GAC en deux également par les lignes Ab, Ac, deux autres puiſſances repréſentées par Ab & par Ac feroient parcourir la même diagonale AD.

Car ſuppoſons qu'elles fiſſent parcourir une ligne $AO > AD$: ſoit fait le rhombe $ALbl$, & ſoit pris $AI : Ab :: Ab : AO$; il eſt viſible, 1°. que AI ſera $< AL$; car puiſque les rhombes $ALbl$, $AbDc$ ſont ſemblables, on aura $AL : Ab :: Ab : AD$; or $AD < AO$ (*hyp*); donc AL ou $\frac{Ab^2}{AD} > \frac{Ab^2}{AO}$; donc $AL > AI$.

2°. Si on prend $Ao = AI$, il eſt viſible que la puiſſance Ab équivaudra aux deux puiſſances AI, Ao, puiſque (*hyp*) AO équivaut à Ab & Ac; donc au lieu de Ab on peut ſubſtituer les deux puiſſances AI, Ao; & par

conſéquent au lieu de Ab, Ac, on peut ſubſtituer les deux puiſſances égales AI, AK, & une puiſſance $= 2Ao$; or les deux puiſſances AI, AK équivalent à la puiſſance $2Ai$, puiſque (*hyp.*) AB, AC, équivalent à $2AG$ ou AD. Donc les puiſſances Ab, Ac, équivalent à $2Ai + 2Ao$. Or il eſt viſible que lb étant $= AL$, & par conſéquent $> AI$, on a $lG > Ai$; de plus $Ao = AI$ eſt $< AL$, & par conſéquent que Al; donc $2Ai + 2Ao$ eſt évidemment $< 2Al + 2lG$, c'eſt-à-dire, $< AD$. Donc les deux puiſſances Ab, Ac ſeroient tout-à-la-fois équivalentes à une puiſſance $AO > AD$, & à une puiſſance $2Ai + 2Ao < AD$; ce qui eſt abſurde.

Si AO étoit $< AD$, on trouveroit alors par un raiſonnement ſemblable, que $2Ai + 2Ao$ ſeroit $> AD$; & ainſi la puiſſance réſultante de Ab & Ac ſeroit encore tout-à-la fois plus petite & plus grande que AD; ce qui eſt abſurde. Donc AO eſt $= AD$; & en effet il n'y a plus alors aucune contradiction; car les points I & o tombent en L & en l, & on a $2Ai + 2Ao = AD$.

COROLLAIRE I.

Donc ſi deux puiſſances quelconques égales entr'elles, agiſſent ſuivant les directions Ab, Ac; la force qui en réſultera, ſera repréſentée par la diagonale d'un rhombe dont les côtés ſeroient proportionnels à ces puiſſances.

COROLLAIRE II.

Donc auſſi, & par la même raiſon, cette Propoſition

ſera vraie pour deux puiſſances égales qui formeront entr'elles un angle $= \frac{bAc}{2}$; & de même pour $\frac{bAc}{4}$, & en général pour $\frac{BAC}{2^n}$, n étant un nombre entier poſitif quelconque.

COROLLAIRE III.

Donc (Coroll. Propoſ. précéd.) deux puiſſances égales faiſant entr'elles un angle $= \frac{120}{2^n}$, donneront toujours la diagonale.

PROPOSITION III.

Si la force qui réſulte de deux puiſſances égales, agiſſant ſuivant AB, AC (*fig.* 30.), eſt repréſentée par la diagonale AD; que la force qui réſulte de deux puiſſances égales, dirigées ſuivant deux autres lignes quelconques Ab & Ao, ſoit de même repréſentée par la diagonale du rhombe fait ſur ces côtés; qu'enfin faiſant l'angle $b'AB = bAB$, la diagonale AB repréſente de même la force réſultante de Ab & de Ab'; je dis que ſi on fait l'angle $gAc' = gAb'$, les deux forces Ab', Ac' donneront auſſi la diagonale.

Car (*hyp.*) la force AB équivaut à Ab & Ab'; & par conſéquent AB, AC, équivalent à Ab, Ac, Ab', Ac'; or (*hyp*) Ab, Ac, équivalent à la diagonale $2Ag$; donc puiſque AB, AC équivalent à la diagonale AD, qui eſt $= 2Ag + 2gG$, Ab', Ac', doivent équivaloir

à $2gG$; or $gG = Ag'$, puiſque (conſtr.) Ab' & Bg ſont égales & parallèles. Donc Ab', Ac' équivalent à $2Ag'$, c'eſt-à-dire, à la diagonale du rhombe formé ſur les côtés Ab', Ac'.

COROLLAIRE I.

Donc en général, ſi deux puiſſances égales quelconques, formant un angle quelconque A, donnent la diagonale, & qu'il en ſoit de même de deux puiſſances égales quelconques, formant un angle b, & auſſi de deux puiſſances égales quelconques formant un angle $A - b$; il en ſera de même auſſi de deux puiſſances égales quelconques formant l'angle $A + b$, ou $A + A - b$, c'eſt-à-dire, $2A - b$.

COROLLAIRE II.

Donc puiſque l'angle de 120° & de $\frac{120^\circ}{2}$ donne la diagonale, il s'enſuit que l'angle de $\frac{3 \cdot 120}{2}$ la donnera auſſi; de même & par la même raiſon $\frac{4 \cdot 120}{2}$, & en général $\frac{p \cdot 120}{2}$; de même puiſque $\frac{120}{2^n - 1}$ & $\frac{120}{2^n}$ donnent la diagonale, $\frac{3 \cdot 120}{2^n}$ la donnera, ainſi que $\frac{4 \cdot 120}{2^n}$ &c.; & en général $\frac{p \cdot 120}{2^n}$ la donnera toujours, p étant un nombre entier poſitif quelconque, ainſi que n.

PROPOSITION IV.

Si deux puiſſances aE, ae (*fig.* 31.), égales entr'elles, ſont auſſi égales chacune à deux autres puiſſances $a\beta$, $a\chi$, & font entr'elles un plus petit angle; je dis que la force réſultante des deux premieres, ſera plus grande que la force réſultante des deux autres. Car ſoient prolongées aE & ae, de maniere que $aE' = aE$, & $ae' = ae$; la force réſultante des forces égales aE', $a\chi$, diviſera l'angle $E'a\chi$ en deux également, & par conſéquent tombera dans l'angle $E'aQ$, puiſque $E'aQ > Qa\chi$ (*hyp.*); & il en ſera de même de la force réſultante de ae' & de $a\beta$, qui tombera dans l'angle Oae'. Donc la force réſultante de ces deux réſultantes, qui ſont évidemment égales entr'elles, ſera dirigée ſuivant aP. Donc la force qui réſulte de aE' & ae', & qui agit ſuivant aP, eſt plus grande que celle qui eſt dirigée ſuivant $a\beta$, $a\chi$, & qui agit ſuivant ap dans une direction contraire. Donc la force qui réſulte de aE & ae, eſt auſſi plus grande que celle qui réſulte de $a\beta$ & $a\chi$.

PROPOSITION V.

Un angle quelconque $\beta a\chi$ étant donné, on peut toujours trouver un angle $\frac{p \cdot 120}{2^p}$, ou qui lui ſoit égal, ou qui en differe moins que d'un angle donné k, ſi petit qu'on voudra.

Car il eſt évident; 1°. qu'on peut rendre le dénomi-

nateur 2^n ſi grand, que $\frac{120}{2^n}$ ſoit $< k$: cela poſé, multiplions par un nombre q l'angle $\frac{120}{2^n}$; de maniere que $(q+1)\times\frac{120}{2^n}$ ſoit $> \beta\alpha\chi$; & que $\frac{q\times 120}{2^n}$ ſoit $< \beta\alpha\chi$; ce qui eſt évidemment poſſible : on aura $(q+1)\left(\frac{120}{2^n}\right)-\frac{q\cdot 120}{2^n} > \beta\alpha\chi-\frac{q\cdot 120}{2^n}$; c'eſt-à-dire, $\frac{120}{2^n} > \beta\alpha\chi-\frac{q\cdot 120}{2^n}$: donc à plus forte raiſon (puiſque $k > \frac{120}{2^n}$), on aura $\beta\alpha\chi-\frac{q\cdot 120}{2^n} < k$. De même, puiſque $\frac{q\cdot 120}{2^n} < \beta\alpha\chi$, on aura $(q+1)\left(\frac{120}{2^n}\right) - \beta\alpha\chi < (q+1)\left(\frac{120}{2^n}\right)-\frac{q\cdot 120}{2^n}$; c'eſt-à-dire, $(q+1)\left(\frac{120}{2^n}\right)-\beta\alpha\chi < \frac{120}{2^n}$, & à plus forte raiſon $< k$.

COROLLAIRE I.

Donc on peut toujours trouver (*fig.* 32.) un angle $E\alpha e < \beta\alpha\chi$, ou un angle $F\alpha f > \beta\alpha\chi$, qui differe de $\beta\alpha\chi$ moins que d'un angle donné ſi petit qu'on voudra, & qui ſoit $= \frac{p\cdot 120}{2^n}$, p & n étant deux nombres entiers & poſitifs.

COROLLAIRE II.

Donc ſi $\alpha\delta$ eſt la diagonale du rhombe fait ſur les côtés $\alpha\beta$, $\alpha\chi$, & qu'on faſſe αE & $\alpha F = \alpha\beta$, on pourra toujours

toujours ſuppoſer que la diagonale faite ſur $\alpha E, \alpha e$, differe de $\alpha \delta$ auſſi peu qu'on voudra, ainſi que la diagonale faite ſur $\alpha F, \alpha f$, les angles $E\alpha e, F\alpha f$ étant des multiples de $\frac{120}{2^n}$.

PROPOSITION VI.

Deux puiſſances égales $\alpha\beta, \alpha\chi$ (*fig.* 32.) formant un angle quelconque, donneront toujours pour la réſultante la diagonale $\alpha\delta$. Car ſuppoſons d'abord qu'elles donnaſſent αR, c'eſt-à-dire, plus que la diagonale; & ſoient ſuppoſées les puiſſances $\alpha E, \alpha e$, égales à $\alpha\beta, \alpha\chi$, & formant entr'elles un angle $\frac{p \cdot 120}{2^n} < \beta\alpha\chi$, & tel que la diagonale ſurpaſſe $\alpha\delta$ d'une quantité moindre que δR (ce qui eſt toujours poſſible par la Propoſ. V.); il s'enſuivroit donc que la force réſultante de $\alpha E, \alpha e$, ſeroit moindre que la réſultante de $\alpha\beta$ & $\alpha\chi$; ce qui eſt contre la Propoſ. IV.

Si αR étoit ſuppoſé $< \alpha\delta$; alors en ſuppoſant $F\alpha = \alpha\beta = f\alpha$, & l'angle $F\alpha f = \frac{p \cdot 120}{2^n}$ & $> \beta\alpha\chi$, on démontreroit de même que αR ne ſauroit être $< \alpha\delta$.

COROLLAIRE.

Donc deux puiſſances égales, formant un angle quelconque, équivalent toujours à une ſeule puiſſance repréſentée par la diagonale du rhombe formé ſur des

côtés proportionnels à ces puiſſances, & faiſant entre eux le même angle. Donc, comme M. Daniel Bernoulli l'a démontré, deux puiſſances quelconques, égales ou inégales, faiſant entr'elles un angle quelconque, équivalent à une ſeule repréſentée par la diagonale du parallèlogramme dont les côtés ſeroient comme ces puiſſances, & feroient le même angle. En effet M. Daniel Bernoulli a démontré d'une maniere très-rigoureuſe & très-élégante (*Voyez* Mém. de Peterſbourg, *Tome I*, pag. 135 & 136), qu'un corps pouſſé par deux forces qui font entr'elles un angle droit, doit décrire une ligne *égale* à la diagonale. Or de-là & des Propoſitions précédentes, il eſt aiſé de conclure que cette ligne doit être la diagonale même. Car ſoient AB, AC (*fig.* 33.), les deux forces qui font entr'elles un angle droit; & ſoient deux autres forces AB, AD, égales à celles-là, & faiſant auſſi un angle droit; il eſt clair, que comme les forces AC, AD ſe détruiſent, le chemin du corps en vertu de ces quatre forces, ſera 2 AB. De plus ſi les lignes Ae, Ae' (égales chacune à la diagonale AE) ſont le chemin du corps en vertu des forces AB, AC, & AB, AD, il eſt évident que les deux forces Ae, Ae' doivent faire parcourir au corps le même chemin que les quatre forces AB, AC, AB, AD, dont elles ſont les réſultantes; par conſéquent ces forces Ae, Ae', doivent faire décrire la ligne 2 AB. Or par les Théorêmes précédens les forces Ae, Ae', font parcourir 2 Af. Donc $Af = AB$. Donc les lignes Ae, Ae', doi-

vent tomber sur les diagonales AE, AE'. Donc la diagonale est le chemin du corps dans le cas où les deux forces font un angle droit.

Lorsque l'angle BAC (*fig.* 34.) n'est pas droit, il est aisé de réduire ce cas au précédent; car au lieu de AB on peut substituer les forces rectangulaires AF, AG; ainsi au lieu des forces AB, AC, on aura les forces AG, AC, AF, ou, ce qui revient au même, à cause de $DC=AF$, les forces rectangulaires AG, AD, qui feront parcourir la diagonale AE du rectangle $AGED$. Or cette diagonale est la même que celle du parallélogramme $BACE$.

Fin du Cinquiéme Mémoire.

SIXIÉME MÉMOIRE.

Sur les Logarithmes des quantités négatives.

EN 1747 & 1748, j'eus avec le célébre M. Euler une diſpute par Lettres, ſur les Logarithmes des quantités négatives, que ce grand Géometre prétendoit être imaginaires, & que je croyois être réels, ou du moins pouvoir être ſuppoſés tels. J'ai lû depuis dans une Diſſertation de M. Euler ſur ce ſujet, imprimée en 1751 dans les Mém. de l'Académie Royale des Sciences de Pruſſe pour l'année 1749, que cette même queſtion avoit été autrefois agitée entre Meſſieurs Leibnitz & Bernoulli; j'ai appris par l'Ecrit de M. Euler, que M. Bernoulli ſoutenoit le même ſentiment que moi, & s'appuyoit en partie ſur les mêmes raiſons; ce que j'ignorois abſolument, les Lettres que cite M. Euler de ces deux grands hommes, ne m'étant tombées entre les mains qu'après la lecture du Mémoire de M. Euler, & après toutes les réflexions que j'avois déja faites ſur ce ſujet. Mais outre les difficultés de M. Bernoulli, ſur leſquelles je m'étois rencontré avec ce ſavant Mathématicien, j'en avois en-

core proposé à M. Euler plusieurs autres, qui me paroissoient assez fortes. M. Euler essaie dans son Mémoire de résoudre quelques-unes de ces objections, & laisse les autres sans réponse, ne les jugeant peut-être pas assez solides.

La lecture du Mémoire de M. Euler a rappellé mes idées sur les Logarithmes des quantités négatives, & j'ai cru devoir exposer ici les difficultés dont cette matiere me paroît susceptible; cependant je m'abstiens de prononcer; je me borne à faire voir que la question n'est pas aussi décidée qu'on pourroit le croire.

ON APPELLE Logarithmes une suite de nombres en progression Arithmétique *quelconque*, répondans à une suite de nombres en progression Géométrique *quelconque*.

On suppose pour plus de facilité (car cette supposition est arbitraire) que le nombre qui représente l'unité dans la progression Géométrique, ait zero pour Logarithme. Du reste la progression Arithmétique est absolument à volonté, & peut suivre telle loi que l'on veut.

Non-seulement la progression Arithmétique qui répond à une progression Géométrique proposée (par exemple, 1, 2, 4, 8 &c.) est arbitraire, puisqu'il n'y a aucune liaison nécessaire entre ces deux progressions; mais encore, & par la même raison, la progression Géométrique qui répond à une progression Arithmétique proposée (comme o, n, $2n$, $3n$ &c.) est arbitraire aussi. Par exemple, ces nombres $1, 2, -2, 4, -4, 8, 16, -32$ &c.

qui ſont en progreſſion Géométrique, peuvent être ſuppoſés avoir pour Logarithmes, les nombres de la progreſſion $0, n, 2n, 3n$ &c.

Il eſt de plus évident, qu'en imaginant une progreſſion Arithmétique quelconque, dont le premier terme ſoit zéro, & dont les termes répondent à ceux d'une progreſſion Géometrique quelconque, on pourra trouver les Logarithmes de tous les nombres compris ou ſous-entendus dans cette progreſſion; par exemple, ſi la progreſſion Géométrique eſt une progreſſion de nombres entiers quelconques, comme 1, 2, 4, 8 &c. on pourra trouver les Logarithmes de tous les nombres moyens proportionnels à l'infini entre 1 & 2, 2 & 4, 4 & 8 &c. Car ces nombres peuvent être cenſés appartenir à une progreſſion Géométrique continue.

C'eſt d'après cette théorie des Logarithmes, que les Géometres ont imaginé une courbe BMN (*fig.* 35.) qu'ils appellent Logarithmique, & dans laquelle les ordonnées AB, PM, ZN, TV &c. étant ſuppoſées en progreſſion Géométrique, les abſciſſes correſpondantes AP, AZ, AT &c. ſont en progreſſion Arithmétique; AB étant ſuppoſée 1, & l'abſciſſe qui lui répond en A étant $= 0$. On a trouvé que cette courbe avoit une ſoutangente conſtante PR; & le Logarithme du rapport de NZ à AB eſt égal au nombre qui eſt déſigné par le rapport de l'abſciſſe AZ à la ſoutangente PR.

Soit $AP = x$, $PM = y$; l'équation $y = c^x$ eſt celle que les Géometres donnent pour la Logarithmique;

elle ſignifie que ſi on nomme b la ſoutangente, a la ligne que l'on prend pour l'unité, & c l'ordonnée à laquelle répond une abſciſſe $= b$, on aura $\frac{y}{c} = \frac{\frac{x}{cb}}{\frac{x}{ab}}$; qui ſe change en $y = c^x$, en faiſant $a = 1$, & $b = 1$.

Pour entamer préſentement la queſtion des Logarithmes des quantités négatives; voici à quoi elle ſe réduit. Soit imaginée la ſuite de tous les nombres naturels, depuis zéro juſqu'à l'infini, tant poſitifs que négatifs, $-\infty \ldots -2.-1.0.1.2.3$ &c. $\ldots \infty$; & ſoient imaginés au-deſſous des nombres 1, 2, 3, &c. leurs Logarithmes, 0, p, q, &c. leſquels formeront une ſuite quelconque. Il eſt d'abord évident que le Logarithme de ∞ ſera infini, & que le Logarithme de 0 ſera égal au Logarithme infini de ∞ pris négativement. Mais quels ſeront les Logarithmes des nombres négatifs -1, -2, &c. ou, ce qui revient au même, que deviendra la ſerie des Logarithmes, répondante par ſon milieu à zéro, & ſe terminant de part & d'autre à deux nombres infinis, l'un poſitif & l'autre négatif? J'expoſerai d'abord les raiſons purement Métaphyſiques, qui autoriſent à penſer que les Logarithmes des quantités négatives peuvent être regardés comme réels. A ces raiſons j'en joindrai d'autres purement Géométriques, & qui me paroiſſent démonſtratives; enfin je répondrai aux objections.

En premier lieu, il paroît difficile de concevoir com-

ment une ſerie terminée de part & d'autre par ∞ & $-\infty$. peut paſſer du réel à l'imaginaire, lorſque x n'a qu'une ſeule valeur en y, comme on le ſuppoſe dans la Logarihmique; du moins ce paſſage ne peut avoir lieu dans les courbes Géométriques (*a*). J'avoue que la Logarithmique n'étant pas une courbe Géométrique, cette concluſion ne peut pas s'y appliquer en toute rigueur; mais elle ſuffit au moins pour faire préſumer qu'une quantité, telle que la repréſente l'abſciſſe de cette courbe, ne ſauroit paſſer bruſquement de $-\infty$ à l'imaginaire. Il eſt bien plus ſimple de penſer, que la ſerie des Logarithmes qui exprime les différentes valeurs de x, & qui devient $-\infty$ lorſque $y = o$, revient ſur ſes pas lorſque y devient négative; & qu'elle repaſſe de $-\infty$ à $-100\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ &c. & de-là à ∞, tandis que la ſerie qui exprime à l'infini les différentes valeurs négatives de y, ſavoir, -1, -2, -3 &c. parcourt de ſon côté ſucceſſivement tous les nombres négatifs poſſibles depuis o juſqu'à $-\infty$. Cette ſuppoſition n'a rien que de fort naturel. En effet; 1°.

(*a*) Car pour que x n'ait qu'une ſeule valeur en y, il faut que la valeur de x exprimée en y, n'enferme aucun radical pair. Or cela poſé, la valeur de x ne deviendra pas imaginaire en faiſant y négative. Il ne peut donc y avoir de courbes Géométriques ſemblables à la Logarithmique, telle que la ſuppoſent ceux qui regardent les Logarithmes des nombres négatifs comme imaginaires; c'eſt-à-dire, qu'il ne peut y avoir de courbe Géométrique, dans laquelle faiſant $y = \infty$ on ait $x = \infty$, & faiſant $y = o$, on ait $x = -\infty$, dans laquelle enfin x n'ait jamais qu'une ſeule valeur en y, & cependant devienne imaginaire lorſque y ſera négative.

puiſque

puiſque les Logarithmes répondans à une progreſſion de nombres quelconques, ſont arbitraires, qui peut empêcher de ſuppoſer que les deux progreſſions — 1 — 2 — 3 — 4 &c.

1 2 3 4 &c.

conſidérées comme des progreſſions différentes & indépendantes l'une de l'autre, ont les mêmes Log. o, p, q &c ?

2°. Dans la ſerie des nombres naturels

$$-\infty \ldots -2, -1, 0, 1, 2 \ldots \infty$$

ſoient pris les nombres 1 & —1, on aura $1 : -1 :: -1 : 1$; donc $-1^2 = 1^2$; donc 2 Log. — 1 = 2 Log. 1 = o; donc Log. — 1 = o; or ſi Log. — 1 = o, il s'enſuit, ſelon M. Euler même, (& cela eſt très-facile à prouver) que les Logarithmes des nombres négatifs ſont réels, ou peuvent être ſuppoſés réels. Tout ſe réduit donc à bien établir que Log. — 1 = ou peut être ſuppoſé = o. La preuve que nous venons d'en donner, paroît fort ſimple & ſans réplique; je tâcherai de faire voir dans la ſuite de cet Ecrit, le peu de ſolidité des réponſes qu'on a voulu faire à cette preuve; mais avant d'examiner ces réponſes, je vais diſcuter une objection à laquelle je ne ſache pas qu'on ait penſé, & qui mérite cependant quelqu'examen.

La progreſſion des nombres naturels 1, 2, 3 &c. pourra-t-on dire, n'eſt cenſée avoir des Logarithmes qu'en vertu de ce qu'on peut toujours regarder ces nombres 1, 2, 3 &c. comme appartenans à une progreſſion Géométrique, dans laquelle on a omis les termes intermédiaires. Or une telle progreſſion ne ſauroit s'étendre au-

de-là des limites, o d'une part, & ∞ de l'autre ; elle ne paſſera jamais au négatif, & aucun de ſes termes ne peut être ſuppoſé avoir —. Donc &c.

Ce raiſonnement eſt facile à réfuter. En effet ſuppoſons qu'on demande une courbe, dans laquelle les abſciſſes *étant en progreſſion Géométrique*, les ordonnées ſoient entr'elles comme les quarrés de ces abſciſſes ; on prouveroit par la même raiſon que cette courbe ne pourroit avoir d'ordonnées réelles répondantes aux abſciſſes négatives. Car, diroit-on, dès qu'on ſuppoſe que les abſciſſes forment une progreſſion Géométrique, on ne ſauroit les ſuppoſer ſucceſſivement poſitives & négatives ; donc la courbe ne s'étendra que du côté des x & des y poſitives. Cependant cette courbe ſeroit la parabole ordinaire $y = x^2$, dans laquelle x négatif rend y poſitif & réel. Il en eſt de même d'une infinité d'autres cas.

On dira peut-être, qu'en changeant l'énoncé du Problême, alors on voit que la courbe $y = x^2$, a des ordonnées réelles du côté poſitif & négatif des x ; par exemple, ſi on propoſe le Problême ainſi ; *les abſciſſes étant en progreſſion Arithmétique, trouver la courbe dans laquelle les ordonnées ſoient comme les quarrés des nombres qui repréſentent ces abſciſſes.* Mais en ce cas on pourroit auſſi énoncer le Problême de la Logarithmique, de la maniere ſuivante. *Trouver une courbe dans laquelle les abſciſſes étant en progreſſion Arithmétique ou en progreſſion quelconque, les ordonnées ſoient comme les Logarithmes de ces abſciſſes, ou plutôt en général*

comme les aires correſpondantes $\int \frac{dy}{y}$.

Un pareil énoncé fera entiérement diſparoître la difficulté tirée de l'impoſſibilité des quantités négatives dans la progreſſion Géométrique, *o*, 1, 2, 4 &c. Difficulté d'ailleurs illuſoire, puiſque les ordonnées de la Logarithmique formant une ſuite continue & non interrompue depuis *o* juſqu'à l'infini, ne conſtituent pas plus une progreſſion Géométrique, qu'une autre progreſſion quelconque.

Il n'eſt donc nullement néceſſaire que la progreſſion $\infty \ldots . 3, 2, 1, 0, -1, -2$ &c. appartienne à une progreſſion Géométrique continue : il ſuffit que *o*, dernier terme de la progreſſion poſitive, ſoit le commencement d'une autre progreſſion *o*, — 1, —2, — 3 &c. qui revient, pour ainſi dire, en ſens contraire ſur la premiere, & qui eſt comme *le complément* de cette progreſſion Géométrique. Car ſi on cherche une moyenne proportionnelle entre 1 & 4, par exemple, on trouvera également le nombre 2 de la progreſſion poſitive, & le nombre — 2 de la progreſſion négative. D'où l'on voit ; 1°. que la progreſſion négative eſt *le complément* de la poſitive, puiſque ces deux progreſſions enſemble donnent toutes les moyennes proportionnelles poſſibles ; 2°. que le Logarithme de 2 & le Logarithme de — 2 doivent être les mêmes, puiſque faiſant Log. 1 = *o*, & Log. 4 = *p*, on aura Log. 2 & Log. — 2 = $\frac{p}{2}$.

L'objection propoſée ne prouve donc rien contre l'opi-

nion dont nous tâchons d'expoſer ici les preuves ; & même cette objection approfondie devient elle-même une preuve de notre opinion. Mais comme l'équation $y = x^2$ donne la figure entiere de la parabole, voyons ſi l'équation $x = \int \frac{a\,dy}{y}$, ou $dx = \frac{a\,dy}{y}$ de la Logarithmique, pourra nous fournir quelques argumens en faveur des Logarithmes réels des quantités négatives. C'eſt ici où commencent nos preuves directes & Géométriques.

Pour cela ſuppoſons en général $dx = \frac{a^n\,dy}{y^n}$; n étant un nombre entier poſitif impair : il eſt certain qu'on pourra conſtruire la courbe à laquelle cette équation appartient.

Il faut d'abord tracer (*fig.* 36.) les hyperboles OPV, GFK, dans leſquelles l'abſciſſe $AN = y$, & l'ordonnée $PN = \frac{a^n}{y^n}$; il faut enſuite chercher l'aire $\int \frac{a^n\,dy}{y^n}$ répondante à une abſciſſe quelconque AR, en ſuppoſant que cette aire ſoit $= o$, lorſque $y = AN$; la courbe dont les ordonnées ſeront proportionnelles à ces aires, ſera la courbe cherchée.

Or l'on trouvera facilement qu'à une abſciſſe quelconque y, poſitive ou négative, il répond la même valeur de l'aire. Car ſoit $An = AN$, & $Ar = AR$; l'aire répondante à l'abſciſſe Ar ſera $NPOA + AnpG + npſr$. Or les aires $AnpG$, $npſr$ étant négatives par rapport à l'aire $NPOA$, qui eſt négative elle-même par rapport à l'aire $NPSR$; il s'enſuit que l'aire répondante à

l'abſciſſe négative Ar, c'eſt-à-dire, l'ordonnée x répondante à cette abſciſſe, équivaut à la quantité ſuivante $-NPOA+NPOA+NPSR=NPSR$; d'où il s'enſuit qu'à deux valeurs de y égales & de différens ſignes, il répond une même valeur de x. Donc toute courbe dans laquelle $dx=\frac{a^n dy}{y^n}$, n étant un nombre impair entier quelconque, a deux branches égales, ſemblables & ſemblablement ſituées de part & d'autre de la ligne des x. C'eſt auſſi ce qui ſe reconnoît par l'intégration de cette équation, comme M. Euler en convient.

Il eſt vrai que dans le cas de $n=1$, l'intégration n'a pas lieu. Mais la méthode que nous venons de donner pour conſtruire la courbe $dx=\frac{a^n dy}{y^n}$, par la quadrature d'une hyperbole, dont les ordonnées ſoient $=\frac{a^n}{y^n}$, leve toute difficulté. Car l'hyperbole ordinaire, dont les ordonnées ſont $\frac{a}{y}$, eſt préciſément dans le même cas que les autres; & il eſt impoſſible de rien établir ſur les aires répondantes aux abſciſſes de celles-ci, qui ne convienne également à l'hyperbole ordinaire.

L'exemple apporté par M. Euler, de la courbe $y=\sqrt{ax}+\sqrt[3]{[a^3(b+x)]}$, qui perd ſubitement un diametre dans le cas de $b=o$, ne conclud rien pour ce cas-ci; puiſque l'on voit clairement dans cet exemple la raiſon pour laquelle la courbe perd ſon diametre; & qu'au contraire la conſtruction précédente, tirée de la conſidération des

aires hyperboliques, prouve démonſtrativement que la courbe $dx = \frac{a^n dy}{y^n}$ doit conſerver ſon diametre dans tous les cas. D'ailleurs il n'eſt pas inutile de remarquer que ſi la courbe $y = \sqrt{a\,x} + \sqrt[4]{a^3 (b+x)}$ perd ſon diametre dans le cas où $b = o$, ce n'eſt pas parce que y, ſuppoſée négative, donne x imaginaire, comme M. Euler prétend que cela doit arriver à la Logarithmique; c'eſt parce que l'équation du huitiéme degré qui réſulte de $y = \sqrt{a\,x} + \sqrt[4]{a^3 + (b+x)}$, ſe diviſe alors en deux équations rationnelles du quatriéme, & que par conſéquent l'équation appartient alors réellement au ſyſtême de deux courbes différentes, mais réelles, rapportées au même axe. Ainſi ce qu'on pourroit tout au plus conclure de cet exemple, c'eſt que pour avoir les Logar. des quantités négatives, il faudroit tracer au-deſſous de l'axe AT (*fig.* 35.) une autre Logarithmique, ſemblable & égale à la premiere, qui à la vérité ne formeroit pas avec elle une ſeule & même courbe, mais qui n'en repréſenteroit pas moins les Logarithmes des quantités négatives, Logarithmes qu'il ſeroit impoſſible en ce cas d'exprimer autrement, qu'en ſuppoſant deux courbes différentes. En un mot, il s'enſuivroit tout au plus de l'exemple apporté par M. Euler, que l'équation générale qui renfermeroit les Logarithmes des nombres, tant poſitifs que négatifs, appartiendroit au ſyſtême de deux courbes différentes; mais il n'en ſeroit pas moins vrai que les Logarithmes des quantités négatives ſeroient ou

pourroient être ſuppoſés réels. Ainſi dans l'équation $x = y \pm \sqrt{aa + yy}$, ſi on fait y négative, x demeurera réelle; mais les deux équations $x = y \pm \sqrt{aa + yy}$, & $x = -y \pm \sqrt{aa + yy}$, appartiendront au ſyſtême de deux courbes différentes.

Mais nous n'avons pas beſoin d'avoir recours à cette conſidération; & il me paroît démontré, par les aires de l'hyperbole équilatere Apollonienne, que les deux Logarithmes, qui repréſentent, ſelon moi, les Logarithmes des quantités poſitives & négatives, appartiennent à un même ſyſtême, à une même courbe & à une même équation, & que la Logarithmique eſt réellement compoſée de deux branches égales & ſemblables, ſemblablement placées au-deſſus & au-deſſous de ſon axe ou aſymptote.

Voici une nouvelle preuve de cette Propoſition. Que l'on conſidere l'équation $y = c^x$ de la Logarithmique, dans laquelle la ſoutangente eſt ſuppoſée $= 1$, & qu'on prenne $\frac{x}{1} = \frac{n}{2m}$, n & m exprimant des nombres impairs quelconques; on aura certainement deux valeurs pour c^x, l'une poſitive, l'autre négative; car alors $y = \pm \sqrt{c^{\frac{n}{m}}}$. D'où il s'enſuit qu'il y a du moins une infinité de valeurs de x, à laquelle répondent deux valeurs de y égales & de ſignes contraires; & qu'ainſi, comme on le voit (*fig.* 37.), la Logarithmique doit au moins avoir au-deſſous de ſon axe une infinité de points conjugués auſſi près les uns des autres que l'on voudra;

c'eſt auſſi de quoi M. Euler eſt convenu dans une de ſes Lettres.

Or je demande ſi une ſuite de tels points conjugués ne repréſente pas bien une courbe continue ? On dira peut-être que les deux valeurs de y n'ont pas lieu dans tous les cas, parce que $y = c^3$, ou $c^{\frac{1}{3}}$, par exemple, ne donne qu'une valeur réelle de y, & ainſi de pluſieurs autres. A cela on peut répondre, que dans l'équation $y = c^x$, c doit être ſuppoſé avoir deux valeurs égales, l'une poſitive, & l'autre négative. Car c eſt le nombre dont le Logarithme eſt l'unité : or il y a, ſelon moi, deux nombres, l'un poſitif, l'autre négatif, qui ont 1 pour Logarithme. On auroit tort de dire que je ſuppoſe ici ce qui eſt en queſtion ; je me propoſe ſeulement de montrer qu'en ſuppoſant deux valeurs à c, on ſauvera la contradiction, qu'une courbe compoſée d'une infinité de points conjugués, dont la diſtance eſt moindre qu'aucune ligne donnée, ne ſoit pas une courbe continue. Du reſte j'ai expoſé ci-deſſus les preuves directes qu'on peut apporter pour la réalité des Logarithmes des quantités négatives, & par conſéquent pour les deux valeurs de c.

On peut confirmer ces réfléxions par une autre. Soit Q (*fig.* 38.) un point quelconque pris dans l'axe ou aſymptote de la Logarithmique ; je dis qu'il répondra toujours à ce point deux ordonnées égales & de ſigne contraire QS, QR. Car ayant pris à volonté ſur l'axe les parties AQ, QP égales entr'elles, & tiré les ordonnées BA, PM ; il eſt clair que l'ordonnée au point Q ſera moyenne proportionnelle

proportionnelle entre BA & PM; or cette moyenne proportionnelle eſt également $+\sqrt{BA.PM} = QS$; & $-\sqrt{BA.PM} = -QS$ ou QR. Donc &c. C'eſt ainſi que dans une Parabole, l'ordonnée, qui eſt toujours moyenne proportionnelle entre le parametre & l'abſciſſe, eſt également poſitive & négative.

M. Euler objecte dans la Lettre dont j'ai parlé ci-deſſus, que la courbe dont l'équation eſt $y = -2^x$, ou en général $= -a^x$, eſt compoſée d'une infinité de points conjugués infiniment proches, & que cependant cette courbe n'eſt pas continue, puiſque, par exemple, l'ordonnée eſt imaginaire lorſque $x = \frac{1}{2}$.

Je réponds que $y = -a^x$, n'eſt l'équation que d'une partie de la courbe. Car $y = -a^x$ donne $ly = xl. - a$; or $l - a$ & $l + a$ étant égaux, il s'enſuit que l'on a également $ly = xl. - a$, & $ly = xla$; par conſéquent $ly = \pm xl \pm a$; ainſi l'équation de la courbe entiere eſt $y = \pm a^x$. On n'eſt pas plus en droit de prendre $y = a^x$, ou $y = -a^x$, pour l'équation de toute la courbe, qu'on ne le ſeroit de prendre $y = +\sqrt{x}$, ou $y = -\sqrt{x}$ pour l'équation d'une Parabole entiere.

Voilà les raiſons qu'on peut apporter en faveur des Logarithmes réels des quantités négatives; raiſons qui donnent, ce me ſemble, beaucoup de poids à celles de M. Bernoulli; il ne ſera pas inutile d'examiner d'une maniere plus particuliere les preuves apportées par ce grand Géometre, & les réponſes qu'on y a faites.

A la premiere raiſon de M. Bernoulli, tirée de ce que

$\frac{-dx}{-x} = \frac{dx}{x}$, & que par conſéquent $l.-x = lx$, on objecte que par la même raiſon on prouveroit que $L.2x = L.x$, & en général que $L.nx = L.x$. J'en conviens; mais je ne vois pas ce que cette conſéquence peut avoir de choquant.

En effet qu'eſt-ce que $L.x$, en regardant x comme l'ordonnée d'une Logarithmique? C'eſt le Logarithme du rapport de x à une ordonnée b que l'on prend pour l'unité. Qu'eſt-ce que le Log. de nx? C'eſt en général le Logarithme du rapport de nx à une ligne quelconque c que l'on prend pour l'unité. Si on fait $c = b$, on trouvera aiſément que Log. $\frac{nx}{c} = l\frac{x}{b} + l\frac{nb}{b}$, ou $l.nx = lx + ln$; mais ſi on fait $c = nb$, on aura $l\frac{nx}{nb} = l\frac{x}{b} = lx$. En général il eſt évident que ſi on prend $L.n$ pour zero, ou, ce qui revient au même, ſi on prend n pour repréſenter l'unité, $l.nx$ ſera égal au Logarithme de x. Pourquoi donc en prenant -1 pour repréſenter l'unité, c'eſt-à-dire, pour le nombre dont le Log. $= 0$, n'auroit-on pas $L.nx = L.-x = L.x$? D'ailleurs on peut obſerver; 1°. qu'en faiſant $l.nx = lx$, on ne donne point une infinité de branches à la Logarithmique, comme le croit M. Euler; puiſque $l.nx$ & lx ſuppoſés égaux, appartiennent à la même Logarithmique, dont l'origine eſt ſuppoſée ſeulement en différens points; de même que $yy = ax \pm b$ repréſente, à proprement

parler, une ſeule & unique Parabole, dans laquelle l'origine des abſciſſes eſt plus ou moins avancée. 2°. Que quand $l.nx$ & lx, ſuppoſés égaux, appartiendroient à des Logarithmiques différentes; il ne s'enſuivroit pas pour cela qu'il en fût de même de lx & de $l.-x$; puiſque nous avons prouvé par la conſtruction des aires de l'hyperbole équilatere, que lx & $l.-x$ donnent à la Logarithmique deux branches égales & ſemblablement ſituées par rapport à l'axe.

Quant à ce qu'objecte M. Euler, que ſi Log. -1 étoit $=o$, on auroit auſſi Log. $\sqrt{-1}=o$, & Log. $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=o$; ce qui renverſe, ſelon lui, toute la doctrine des imaginaires; je ne vois point en quoi cette conſéquence ſeroit abſurde.

En effet tout ſyſtême de Logarithmes eſt arbitraire en ſoi; & il eſt clair que o, o, o, o &c. formant une progreſſion Arithmétique, je puis au-deſſus d'une progreſſion Géométrique quelconque, imaginer une ſuite de zeros qui ſeront chacun les Logar. du nombre qui leur répond. Ainſi poſant o pour le Logarithme de 1 & de -1, j'aurai o pour le Logarithme de $\sqrt{-1}$ & de $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$.

D'ailleurs on peut prouver par la Logarithmique même, que les Logarithmes des quantités imaginaires peuvent être réels. En effet (*fig.* 38.) la moyenne proportionnelle entre AB & la négative QR eſt imaginaire, & cette moyenne proportionnelle a pour Logar. $AO=\frac{AQ}{2}$.

Mais, dira-t-on, que deviendra donc alors cette Proposition, que le rayon eſt à la circonférence comme $\sqrt{-1}$ eſt à $4l\sqrt{-1}$? Je réponds, que ſi dans cette Propoſition $l\sqrt{-1}$ n'eſt pas $= o$, mais imaginaire, cela vient du ſyſtême de Logarithmes que l'on ſuppoſe dans l'équation entre les arcs de cercle z & leurs ſinus x. En effet $dz = \frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$, donne $dz = \frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{xx-1}}$. $= \frac{-dx}{\sqrt{-1}\cdot\sqrt{xx-1}}$; d'où l'on tire $z = \frac{1}{\sqrt{-1}}\text{Log.}\frac{\sqrt{-1}}{x+\sqrt{xx-1}}$. Cette équation appartient à un ſyſtême de Logarithmes, tel 1°. que la ſoutangente de la Logarithmique qui le repréſente, ſoit $\frac{1}{\sqrt{-1}}$, c'eſt-à-dire, imaginaire; 2°. que le Logarithme de $\frac{\sqrt{-1}}{x+\sqrt{xx-1}}$ ſoit imaginaire, en donnant à x toutes les valeurs poſſibles, depuis o juſqu'à l'unité. C'eſt un ſyſtême de Logarithmes particulier, qui n'a rien de commun avec l'équation de la Logarithmique $x = ly$, dans laquelle la ſoutangente eſt réelle, & dans laquelle y eſt ſuppoſée toujours réelle. Voilà donc, ce me ſemble, la contradiction ſauvée.

Avant que d'aller plus loin, j'obſerverai que les réductions des Logarithmes en ſeries ne peuvent rien prouver, ni pour, ni contre les Logarithmes réels des quantités négatives; 1°. parce que ces réductions ne donnent point toutes les valeurs poſſibles de la quantité qu'on

développe de la ſorte ; 2°. parce que la ſerie eſt ſouvent divergente, & par conſéquent fautive.

Il faut maintenant paſſer aux preuves poſitives, par leſquelles M. Euler tâche d'établir que les Logarithmes des quantités négatives ſont imaginaires. Ces preuves ſont fondées ſur ce que $l.\overline{1+\omega}^{n} = n\omega$ repréſente, ſelon lui, tous les Logarithmes ; ſuppoſition qui me paroît pouvoir être contredite ; car ω étant infiniment petit, & n infiniment grand, comme il le ſuppoſe, $\overline{1+\omega}^{n}$ ne ſauroit repréſenter que des nombres poſitifs.

D'ailleurs, en admettant même cette ſuppoſition, il me paroît évident que l'équation $1 + \frac{y}{n} =$ coſinus $\frac{2\lambda - 1}{n}.\Pi \pm \sqrt{-1}.$ ſin. $\frac{2\lambda - 1}{n}.\Pi$, à laquelle parvient M. Euler, & dans laquelle $\Pi = 180°$, $y =$ Log. -1, & λ un nombre entier quelconque, donne non-ſeulement $y = \pm(2\lambda - 1)\Pi\sqrt{-1}$, comme le veut M. Euler, mais encore $y = o$; puiſqu'en ſuppoſant $y = o$ & $n = \infty$ dans l'équation $1 + \frac{y}{n}$ &c. on a $1 = 1$. De plus dans cette équation même $1 + \frac{y}{n} =$ coſ. $\frac{\overline{2\lambda - 1}.\Pi}{n} \pm \sqrt{-1}$ ſin. $\frac{2\lambda - 1}{n}.\Pi$, ſoit $\lambda = n = \infty$, on aura $1 + \frac{y}{n} =$ coſ. $2\Pi \pm \sqrt{-1}.$ ſin. 2Π, ou $1 + \frac{y}{n} = 1$; donc $y = o$. Ainſi $y = o$, eſt une des

valeurs de y que donne l'équation $1 + \frac{y}{a} = \&c.$ trouvée par M. Euler.

Enfin il me ſemble que M. Euler ne répond pas d'une maniere ſatisfaiſante, p. 163, à l'objection tirée de ce que $2l.+a = 2l.-a$. Cette formule ſignifie (ou il faut renoncer à toutes les dénominations analytiques) que le double du Logarithme de $+a$ eſt égal au double du Logarithme de $-a$, & non que la ſomme de deux différens Logarithmes de $+a$, eſt égale à la ſomme de deux différens Logarithmes de $-a$. En effet ſoient 1 & a^2 deux nombres poſitifs & réels, qui ayent o & p pour Logarithmes; il eſt évident, comme nous l'avons déja dit, que la moyenne proportionnelle entre 1 & a^2 ſera également a & $-a$, & que le Logarithme correſpondant ſera $\frac{p}{2}$. Donc $\frac{p}{2} = l.+a$, & $\frac{p}{2} = l.-a$. Il n'y a point d'argument ni de calcul, quelque ſubtil qu'il puiſſe être, qui ſoit capable de renverſer une Propoſition ſi ſimple.

De toutes ces réfléxions il s'enſuit, ce me ſemble; qu'on peut ſuppoſer indifféremment, ou réels, ou imaginaires, les Logarithmes des quantités négatives. Tout dépend uniquement du ſyſtême de Logarithmes qu'on choiſira. Mais je ne crois pas qu'on ſoit fondé à ſoutenir excluſivement & en général, que les Logarithmes de toutes les quantités négatives ſoient imaginaires; comme on ne pourroit pas ſoutenir en général, ni que le Lo-

garithme de 1 eſt néceſſairement $= o$, ni que le Logarithme d'une quantité poſitive & réelle eſt toujours néceſſairement un nombre poſitif. Car on peut ſuppoſer une ſuite de nombres imaginaires en progreſſion Arithmétique, qui répondent à des nombres poſitifs & réels en progreſſion Géométrique, & qui par conſéquent ſoient les Logarithmes de ces nombres. Il n'y a aucune liaiſon néceſſaire entre une ſuite de nombres, & la ſuite des Logarithmes qui leur répondent. Mais quelque ſuite de Logarithmes qu'on ſuppoſe, les propoſitions fondamentales de la théorie des Logarithmes y ſeront toujours vraies; ſavoir, que ſi on fait Log. $1 = o$, $la = p$, $lb = q$, on aura Log. $ab = la + lb = p + q$, $l.\frac{a}{b} = la - lb = p - q$, & ainſi du reſte.

Je comptois terminer ici ces recherches, lorſque le *Commercium Philoſophicum & Mathematicum* de Meſſieurs Leibnitz & Bernoulli (imprimé à *Lauſanne* 1745), m'eſt tombé entre les mains; & j'y ai lû avec ſoin toutes les Lettres qui roulent ſur cette queſtion, Tome II, pag. 269 & ſuivantes. Outre les remarques judicieuſes de M. Euler ſur ces Lettres, remarques qui ſont renfermées dans ſon Mémoire de 1749, & auxquelles je renvoye, voici quelques obſervations que cette lecture m'a fait naître.

I.

M. Leibnitz, qui prétend que le rapport de 1 à -1

eſt imaginaire, parce que, ſelon lui, le Logarithme de — 1 eſt imaginaire, auroit dû, ce me ſemble, obſerver au contraire, que ſuivant les notions les plus communes de l'Algebre, le rapport de 1 à — 1 eſt exprimé par le quotient de 1 diviſé par — 1, & que par conſéquent ce rapport eſt = — 1, c'eſt-à-dire, eſt une quantité réelle. Ce ſeroit une grande erreur de penſer que les Logarithmes expriment les rapports; ce ſeroit comme ſi on diſoit que $\frac{\sqrt{2}}{1}$ ou $\sqrt{2} = \frac{1}{2}$ Log. 2, ou en général que $\frac{a}{b} = la - lb$. Rien ne ſeroit plus faux qu'une telle idée; il ne faut pour le ſentir, qu'un peu de connoiſſance de la théorie des Logarithmes. Il eſt vrai que pluſieurs Géometres, entr'autres M. Cotes, ont regardé les Logarithmes comme la meſure des rapports; mais par cette expreſſion (qu'on auroit tout auſſi-bien fait de ne pas adopter) ils n'ont apparemment voulu dire autre choſe, ſinon que les rapports étant égaux, les Logarithmes ſont égaux, & nullement que le Logarithme d'un rapport peut être pris pour le rapport même. En effet le cas de l'égalité des rapports eſt le ſeul où les Logarithmes ſoient entr'eux comme les rapports. Ainſi on peut dire que le Logarithme de $\frac{1}{2}$ eſt à celui de $\frac{2}{4}$ comme $\frac{1}{2}$ eſt à $\frac{2}{4}$; mais on ne dira jamais qu'en tout autre cas $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} :: la - lb : lc - ld$. En général on feroit beaucoup mieux, comme je viens de le dire, de ne point ſe ſervir de cette maniere d'exprimer ou de repréſenter

repréſenter les rapports par des Logarithmes, à cauſe des erreurs dans leſquelles elle peut induire. Quoi qu'il en ſoit, il eſt au moins certain que le rapport de 1 à — 1 eſt = — 1, ſuivant toutes les régles reçues, & n'eſt pas imaginaire. Je prie les Lecteurs de me pardonner à cette occaſion une eſpèce de digreſſion dont ils pourront tirer quelque utilité.

Qu'il me ſoit donc permis de remarquer, combien eſt fauſſe l'idée qu'on donne quelquefois des quantités négatives, en diſant que ces quantités ſont au-deſſous de zero. Indépendamment de l'obſcurité de cette idée enviſagée métaphyſiquement, ceux qui voudront la réfuter par le calcul, pourront ſe contenter de conſidérer cette proportion, 1 : — 1 :: — 1 : 1; proportion réelle, puiſque le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens, & que d'ailleurs $\frac{1}{-1} = -1$, & $\frac{-1}{1} = -1$.

Cependant ſi on regardoit les quantités négatives comme au-deſſous de zero, 1 ſeroit > — 1, & — 1 < 1; ainſi il ne pourroit y avoir de proportion. Il eſt vrai que M. Leibnitz prétend que — 1 n'eſt pas moyen proportionnel entre 1 & 1, non plus que — 2 entre 1 & 4, quoiqu'il avoue que — 2 × — 2 = 1 × 4; parce que les quantités négatives, dit-il, entrent dans le calcul, ſans entrer dans les rapports, & que des fractions ne ſont pas la même choſe que des rapports. J'avoue que je ne ſens point la force ni la vérité de cette raiſon: elle tendroit à renverſer toutes les notions Algébriques par des limi-

tations inutiles & forcées ; & elle ne ſeroit juſte d'ailleurs, qu'en ſuppoſant que les quantités négatives ſont au-deſſous de zero, ce qui n'eſt pas. Les quantités négatives ſont tout auſſi réelles que les poſitives : elles n'en different que par le ſigne qui les précéde ; & ce ſigne ne ſert qu'à indiquer & à corriger une fauſſe ſuppoſition qui a été faite, ou dans l'énoncé du Problême ou dans la ſolution qu'on en a donnée.

Par exemple, ſi je demande une quantité qui étant ajoutée à 20, donne une ſomme égale à 10, j'écrirai, pour réſoudre ce Problême, $20 + x = 10$, d'où $x = -10$; ce qui me montre que j'aurois dû énoncer le Problême ainſi : *Trouver une quantité qui étant retranchée de* 20, (& non ajoutée), *le reſte ſoit égal à* 10. Cette idée ſe vérifie par l'application de l'Algebre à la Géométrie, où l'on voit que les quantités négatives n'ont d'autre différence d'avec les quantités poſitives, que de ſe prendre du côté oppoſé.

M. Leibnitz auroit-il prétendu que l'ordonnée négative d'une Parabole n'eſt pas moyenne proportionnelle, auſſi-bien que l'ordonnée poſitive, entre le parametre & l'abſciſſe? Non certainement. C'eſt que le ſigne — que porte l'expreſſion Algébrique de cette ordonnée, n'indique que ſa poſition, & n'influe nullement ſur ſa quantité. Or ce n'eſt que par ſa quantité, qu'elle eſt moyenne proportionnelle entre le parametre & l'abſciſſe. Les grandeurs n'ont entr'elles de rapports que par leur quantité. Il ne peut y avoir de rapport entre $-a$ & b, qu'autant

qu'on compare la grandeur de a à celle de b; le ſigne — n'eſt qu'une dénomination, & n'indique qu'une fauſſe poſition ou une maniere d'être particuliere; ce ſigne n'ôte aucune réalité à la quantité qu'il affecte; & ſi le ſigne — ſe rencontre dans le quotient de $-a$ diviſé par b, ce ſigne n'influe non plus en rien ſur la quantité du quotient; il en eſt ſeulement la dénomination; il indique que le quotient de $\frac{a}{b}$, au lieu d'être ajouté aux quantités avec leſquelles il ſe combine dans le calcul, doit en être retranché. En un mot toute quantité par elle-même a le ſigne +; elle ne porte le ſigne — que relativement à une autre, exprimée ou ſouſentendue. Car ſuppoſons, par exemple, qu'un Problême ſoit réduit à l'équation $xx - bx - ab = 0$, dont les racines ſont, comme l'on ſait, $x = b$, $x = -a$; le ſigne — de la quantité a indique qu'elle doit être retranchée des quantités auxquelles b ſera ou pourra être ajoutée. En effet, ſi au lieu de regarder x comme l'inconnue du Problême, on eût pris pour cette inconnue une autre quantité z qui fût égale à $x + 2a$, on auroit trouvé pour lors deux valeurs réelles & poſitives de z, ſavoir $2a + b$, & a ou $2a - a$; où l'on voit que des deux valeurs de x, l'une, ſavoir b, eſt ajoutée à $2a$, & l'autre, ſavoir a, en eſt retranchée: & en général, ſi au lieu de $2a$ on prend $c > a$ pour la grandeur exprimée ou ſouſentendue, à laquelle les valeurs de x doivent être ajoutées, on verra

clairement que la valeur négative de x indique une ſouſtraction.

C'eſt le calcul, il faut l'avouer, qui a induit certains Géometres en erreur ſur la valeur des quantités négatives. Ils ont remarqué que $a < 2a$, donnoit $a - 2a < o$, ou $-a < o$; d'où ils ont conclu que les quantités négatives étoient au-deſſous de zero. Mais ils ne ſeroient pas tombés dans cette erreur, s'ils avoient conſidéré qu'une quantité au-deſſous de zéro eſt une choſe abſurde, & que $-a < o$ ne ſignifie autre choſe que $B - a < B$, B étant une quantité quelconque ſouſentendue & plus grande que a. La ſimplicité & la commodité des expreſſions Algébriques, conſiſte à repréſenter à la fois & comme en racourci un grand nombre d'idées; mais ce Laconiſme d'expreſſion, ſi on peut parler ainſi, en impoſe quelquefois à certains eſprits, & leur donne des notions fauſſes (*a*).

(*a*) A l'occaſion de cette remarque ſur les quantités négatives, j'en ferai ici une autre qui eſt purement élémentaire, mais qui pourra ſervir à répandre un grand jour ſur la théorie de ces quantités, juſqu'à préſent aſſez mal développée par les Algébriſtes. Soit $by = \sqrt{a - x}^2$, l'équation d'une courbe; il eſt évident que tant que x eſt plus petit que a, $a - x$ eſt poſitif, & par conſéquent auſſi $\sqrt{a - x}^2$; mais pourquoi $\sqrt{a - x}^2$ reſte-t-il poſitif quand x eſt $> a$, & que par conſéquent $a - x$ eſt négatif? En voici la vraie raiſon. C'eſt que l'équation $by = \sqrt{a - x}^2$, n'eſt autre choſe que $by = aa - 2ax + xx$. Or que x ſoit $<$ ou $> a$, $aa - 2ax + xx$ eſt toujours une quantité poſitive; dans le premier cas elle eſt le quarré de la quantité poſitive $a - x$; & dans le ſecond cas elle eſt le quarré de la

II.

M. Bernoulli, p. 276, entreprend de prouver d'après l'équation $dy = \frac{dx}{x}$, que la Logarith. a deux branches égales & ſemblables; comme l'hyperbole, dit-il, a deux branches oppoſées. Pour prouver la ſimilitude des branches de la Logarithmique, il ſe ſert, p. 294, comme je l'ai fait, de l'argument tiré des aires hyperboliques, qui me paroît déciſif ſur cette matiere, & que j'avois

---

quantité poſitive $x - a$; ainſi l'équation $by = \sqrt{a - x}^2$, ou $by = aa - 2ax + xx$ en renferme proprement deux autres, ſavoir $by = \sqrt{a - x}^2$ quand x eſt $< a$, & $by = \sqrt{x - a}^2$, quand $x > a$. Ce qui s'accorde avec ce que nous avons dit, que les quantités négatives indiquent une fauſſe ſuppoſition; car l'équation $by = \sqrt{a - x}^2$, quand x eſt $> a$, eſt proprement une fauſſe équation; la véritable eſt $by = \sqrt{x - a}^2$. Pourquoi donc les quantités $+b$ & $-b$, ont-elles toutes deux b^2 pour quarré? C'eſt qu'on peut toujours regarder b comme la différence $a - c$ de deux quantités, dont la ſeconde c eſt plus petite que la premiere a, ſi b eſt poſitif, & plus grande, ſi b eſt négatif; or dans le premier cas le quarré de b ou $a - c$ eſt $aa - 2ac + cc$; & ſi on ſuppoſe que c croiſſe tant qu'on voudra, cette quantité $aa - 2ac + cc$ reſte toujours poſitive, & devient enfin le quarré de $c - a$ au lieu de celui de $a - c$. Ainſi la raiſon pour laquelle le quarré de $-b$ eſt b^2, c'eſt que ſi on regarde $-b$ comme repréſentant une quantité $a - c$ qui eſt devenue de poſitive négative, le quarré $aa - 2ac + cc$, reſte toujours poſitif, ſoit que l'on ait $c < a$, ou $c > a$; donc le quarré de b reſte toujours poſitif, ſoit que b ſoit poſitif, ou non; & quand b devient négatif, ou que a eſt $< c$, alors le quarré de $-b$ eſt proprement celui de $c - a$ ou de $+b$; puiſque ce quarré eſt toujours $aa - 2ac + cc$.

auſſi apporté à M. Euler, ſans avoir encore aucune connoiſſance de ce que M. Bernoulli avoit penſé ſur ce ſujet. Mais il me ſemble que M. Bernoulli ne s'eſt point ſervi, comme l'a cru M. Euler, de l'argument tiré de l'équation $dx = \frac{dy}{y^n}$. Je crois être le premier qui l'aye employé. J'avoue au reſte que cet argument n'auroit pas beaucoup de force, ſi on ſe bornoit à l'intégration de l'équation; mais ſi on joint, comme je l'ai fait, à cette intégration, la conſtruction de la courbe par le moyen de l'aire hyperbolique qui a pour ordonnée $\frac{1}{y^n}$, il me ſemble que l'argument qui en réſulte par rapport aux Logarithmes des quantités négatives, devient ſans réplique.

III.

M. Leibnitz, p. 278, prétend que la Logar. ne peut avoir d'ordonnées négatives, par la raiſon, dit-il, que les ordonnées poſitives ne ſont jamais $= o$, & qu'une quantité poſitive ne paſſe au négatif qu'en paſſant par zéro. Mais pour ſentir le peu de ſolidité de cet argument, il ſuffit de conſidérer l'hyperbole $y^2 = \frac{1}{x}$, qui eſt abſolument dans le cas dont il eſt queſtion ici, ayant deux branches égales & ſemblables des deux côtés de ſon axe, ſans que l'ordonnée y devienne jamais zéro.

Mille autres exemples prouvent qu'il n'eſt point du tout néceſſaire que quelqu'une des ordonnées poſitives

ſoit $= o$, pour que la courbe ait des ordonnées négatives. Par exemple, dans l'hyperbole ordinaire rapportée à ſon ſecond axe, on a $y = \pm \sqrt{aa + xx}$ & la valeur poſitive de y ne devient jamais zéro. C'eſt l'exemple qu'apporte M. Bernoulli. Il auroit pû ajouter, que même une ordonnée poſitive peut paſſer quelquefois au négatif, ſans paſſer par zéro, comme dans la courbe $y = \frac{1}{a - x}$, où y devient négative lorſque $x > a$, & infinie lorſque $x = a$.

Toutes ces réflexions n'échapperont pas ſans doute aux perſonnes verſées dans la Géométrie; mais j'ai cru devoir les expoſer ici en faveur des Mathématiciens moins exercés, entre les mains deſquels ce Mémoire pourra tomber.

I V.

M. Leibnitz avoit objecté, que ſi le Logarithme de -2 eſt réel, celui de $\sqrt{-2}$ devroit en être la moitié. M. Bernoulli nie cette conſéquence, & il me ſemble qu'en cela il ſe trompe; car dès qu'on ſuppoſe le Log. de $1 = o$, & le Logarithme de $-2 = p$, le Logarithme de $\sqrt{-2}$ ſera $= \frac{p}{2}$. M. Bernoulli appuye ſon ſentiment ſur ce que $\sqrt{-2}$ n'eſt pas moyen proportionnel entre -1 & -2, ce qui eſt vrai. Mais $\sqrt{-2}$, comme l'obſerve M. Leibnitz, & comme il eſt aiſé de le voir, eſt moyen proportionnel entre 1 & -2; & par conſéquent ſon Logarithme eſt la moitié du Logarithme

de — 2, en ſuppoſant celui de 10.

M. Leibnitz ajoute, p. 288, un raiſonnement Métaphyſique, auquel je ne répondrai pas, & que je me contenterai de rapporter, faute de l'avoir pû bien comprendre. L'élévation des nombres à un expoſant, dit-il, répond à la multiplication dans les Logarithmes; n^e répond à $e \times$ Log. n. La multiplication dans les nombres répond à l'addition dans les Logarithmes; $n \times K$ répond à Log. n + Log. K. La ſimple poſition dans les nombres répond à la ſimple poſition des Logarithmes; n répond à Log. n. Au contraire, continue toujours M. Leibnitz, l'extraction des racines dans les nombres répond à la diviſion dans les Logarithmes; $\sqrt[e]{n}$ répond à $\frac{\text{Log. } n}{e}$. La diviſion répond à la ſouſtraction; $\frac{n}{K}$ répond à Log. n – Log. K. Mais à quoi répondra — n? M. Leibnitz prétend qu'on ne ſauroit trouver d'expreſſion réelle qui y réponde, parce que deſcendant de l'extraction des racines à la diviſion & à la ſouſtraction, on ne ſauroit, dit-il, rien trouver d'inférieur à la ſouſtraction. Dans une matiere toute de calcul comme celle-ci, on doit, ce me ſemble, ſe défier beaucoup d'un raiſonnement ſi abſtrait & ſi vague. Il peut ſervir d'exemple, entre pluſieurs autres, de l'abus qu'il eſt aiſé de faire de la Métaphyſique dans la Géométrie. D'ailleurs, pourquoi ne diroit-on pas qu'après avoir deſcendu juſqu'à la ſouſtraction, on revient enſuite ſur ſes pas, pour retomber dans les Logarithmes poſitifs?

V.

V.

On voit auſſi par le *Commercium Epiſtolicum* de nos deux grands Géometres, qu'ils avoient examiné l'équation $y = c^x$; mais ſans que M. Bernoulli en ait tiré, comme je l'ai fait, les doubles valeurs de y, dans le cas où $x = \frac{n}{2m}$, ni qu'il ait obſervé, du moins d'une façon nette & préciſe, que la quantité c avoit deux valeurs dans cette équation.

Au reſte, il ſemble que Mrs Leibnitz & Bernoulli ont fini par ſe rapprocher un peu l'un de l'autre, du moins à quelques égards. Ils paroiſſent convenir, pag. 312 & 315, qu'il ne peut y avoir de diſpute ſur cette matiere, que dans la maniere de parler. Ils ſe ſeroient, ce me ſemble, expliqués plus clairement, en convenant que tout ſyſtême de Logarithmes eſt arbitraire; c'eſt pour cette raiſon que les Logarithmes des quantités négatives peuvent être, ou réels, ou imaginaires, ſelon le ſyſtême des Logarithmes que l'on choiſit.

Fin du Sixiéme Mémoire.

SUPPLÉMENT

Au Mémoire précédent, ſur les Logarithmes des quantités négatives.

I.

CE Mémoire étoit fini depuis pluſieurs années, & je ne penſois pas même à le mettre au jour, lorſque j'ai trouvé dans le premier Volume des Mémoires de la Société des Sciences de Turin (dont j'ai déja parlé dans le Supplément au Mémoire ſur les cordes vibrantes), un ſavant Ecrit ſur les quantités imaginaires, où la queſtion précédente eſt traitée. Cet écrit m'a fait naître de nouvelles réfléxions, qui m'ont paru mériter d'être ſoumiſes au jugement des Géometres.

L'Auteur de l'Ecrit dont il s'agit (M. le Chevalier Daviet de Foncenex) adopte le ſentiment de M. Euler, & tâche de le fortifier par de nouvelles preuves. Il a bien ſenti la force de l'objection tirée de l'aire de l'hyperbole équilatere, & il a eſſayé d'y répondre. Il convient que les ordonnées des deux branches oppoſées de l'hyperbole équilatere, ſont unies par le lien de la continuité; mais les aires, ſelon lui, ne le ſont pas; la raiſon qu'il apporte de cette différence, c'eſt, dit-il, qu'en faiſant l'abſciſſe x infiniment petite & poſitive dans l'hy-

perbole équilatere rapportée aux aſymptotes, l'ordonnée correſpondante devient infinie poſitive, & qu'en faiſant x infiniment petite & négative, l'ordonnée correſpondante devient infinie négative, ce qui eſt conforme aux principes de la Géométrie des courbes, ſuivant leſquels une quantité quelconque ne peut devenir de poſitive négative, ſans paſſer par zéro ou par l'infini; au lieu qu'il n'en eſt pas de même de l'aire de l'hyperbole, qui devient *poſitive & finie*, ſelon M. le Chevalier de Foncenex, lorſque x eſt poſitive & infiniment petite, & au contraire *négative & finie*, lorſque x eſt négative & infiniment petite. En effet, dit toujours ce ſavant Géometre, lorſque x eſt infiniment petite & poſitive, l'aire devient $\frac{m\,d\,x}{d\,x} = m$, qui eſt une quantité finie poſitive, & lorſque x eſt infiniment petite négative, cette aire devient $-m$. Ainſi, continue-t-il, l'aire de l'hyperbole ne peut franchir le paſſage du poſitif au négatif, ſans recevoir tout-à-coup un décroiſſement fini, au lieu qu'elle devroit paſſer, ſuivant la loi commune & néceſſaire, par le zéro ou par l'infini. Donc, conclut M. de Foncenex, il n'y a point de paſſage Algébrique des aires poſitives dans l'hyperbole équilatere aux aires négatives.

A cela je réponds; 1°. que lorſque x eſt poſitive & infiniment petite, il n'eſt nullement démontré, du moins par le raiſonnement qu'employe M. le Chevalier de Foncenex, que l'aire de l'hyperbole ſoit finie & $= m$; car la quantité $\frac{m\,d\,x}{d\,x}$ ne repréſente alors qu'une partie de

cette aire, ſavoir, le parallélogramme qui a pour hauteur x ou dx, & pour baſe $\frac{m}{x}$ on $\frac{m}{dx}$; or il ſera aiſé de voir, pour peu qu'on y faſſe d'attention, que l'aire de l'hyperbole eſt même beaucoup plus grande que la ſuite des parallélogrammes m, $\frac{m}{2}$, $\frac{m}{4}$ &c. laquelle eſt $= 2m$. Je ne prétends point au reſte décider ici, ſi l'aire hyperbolique, qui répond à x infiniment petite & poſitive, eſt finie ou infinie; mais je crois ſeulement avoir bien prouvé par le raiſonnement précédent, que celui de M. Foncenex eſt inſuffiſant pour s'en aſſurer. 2°. J'accorde à M. de Foncenex, que la valeur de l'aire qui répond à x poſitive & infiniment petite, ſoit finie & poſitive; & je dis qu'elle eſt encore finie, mais toujours *poſitive* (& non pas *négative*, comme le prétend M. de Foncenex), lorſque x eſt infiniment petite négative; car x étant alors négative auſſi-bien que dx, on a pour l'aire dont il s'agit $\frac{-m\,dx}{-dx} = m$; cette aire en effet n'eſt autre choſe, ſuivant le calcul de M. de Foncenex, que celle du parallélogramme qui a pour hauteur x, & pour baſe $\frac{m}{x}$; or x devenant négative, $\frac{m}{x}$ le devient auſſi, & l'aire redevient poſitive. M. de Foncenex ſemble en convenir lui-même, au moins implicitement, dans une des notes de ſon Mémoire, où il remarque fort bien, que ſi on prend (*fig.* 36.) $AN = 1$, & par conſéquent l'origine des aires hyperboliques en N, les aires $NPRS$

répondantes aux nombres plus grands que l'unité, ſeront poſitives, & les aires *N P Q a* répondantes aux nombres *A a* plus petits que l'unité, ſeront négatives, comme le doivent être en effet les Logarithmes de pareils nombres. Or les aires *G p n A* ſont de ſigne contraire aux aires *N P A O*, l'origine des aires étant priſe en *N*, & les abſciſſes s'étendant le long de *N n K*; car les abſciſſes répondantes à ces aires demeurent de même ſigne, pendant que les ſignes des ordonnées varient. Donc, puiſque les aires *N P Q A* ſont négatives par rapport aux aires *N P R S*, les aires *G p n A* doivent être poſitives. Il n'eſt donc pas exact de dire, que l'aire de l'hyperbole paſſe *du poſitif au négatif* par un décroiſſement fini, en prenant l'origine des *x* en *A*, comme la prend M. de Foncenex; car cette aire dans ce cas demeure toujours poſitive, ſoit qu'on prenne *x* poſitif ou négatif. 3°. Quand même j'accorderois à M. de Foncenex, que l'aire hyperbolique eſt *finie* & *poſitive*, lorſque *x* eſt infiniment petite & poſitive, & *finie négative* lorſque *x* eſt infiniment petite & négative, & que cette aire devient de poſitive négative, lorſque *x* eſt négative; il ne ſeroit pas vrai de dire qu'elle paſſe du poſitif au négatif, ſans paſſer par zéro ou par l'infini : il eſt évident au contraire qu'elle paſſe par zero; puiſqu'en faiſant *x*, non plus infiniment petite, ce qui eſt une ſuppoſition Métaphyſique, mais $= o$ abſolu, l'aire correſpondante eſt auſſi $= o$ abſolu; & comme *x* ne ſauroit devenir de poſitive négative, ſans paſſer par zéro, il s'enſuit que l'aire paſſe auſſi

par zéro dans ce moment; avec cette différence que x devient enſuite négative, & que l'aire reſte toujours poſitive. Si l'on prétendoit que l'aire qui répond à $x = o$, n'eſt pas zéro elle-même, ſous prétexte que l'ordonnée y eſt infinie, ce ſeroit renverſer les premieres notions de la Géométrie, qui nous apprennent qu'une ligne, même infinie, ne peut être égale à une ſurface; & d'ailleurs je demanderois à ceux qui auroient cette prétention, ſi dans l'hyperbole $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, l'ordonnée eſt moins infinie lorſque $x = o$, que dans l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$; néanmoins dans cette premiere hyperbole, l'aire eſt $= 2\sqrt{x}$, & par conſéquent $= o$ lorſque $x = o$.

La démonſtration de M. Bernoulli, tirée des aires de l'hyperbole, ſubſiſte donc, ce me ſemble, en ſon entier, & prouve qu'on peut regarder comme réels les Logarithmes des quantités négatives. Auſſi M. de Foncenex ſemble-t-il ſe rapprocher de cette opinion à la fin de ſon Mémoire, lorſqu'il dit que *les deux branches de la Logarithmique ne ſont pas moins réelles l'une que l'autre, & qu'elles auront leurs uſages particuliers dans pluſieurs cas.* Il eſt vrai qu'il prétend en même-tems que ces deux branches *ſont iſolées & indépendantes l'une de l'autre algébriquement, quoique liées par leur expreſſion tranſcendante;* mais comme il ne le prétend que d'après le raiſonnement que je viens d'examiner, il me ſemble que tout ce que j'ai dit dans mon Mémoire pour prouver

la liaiſon & la dépendance de ces deux branches, ſubſiſte toujours.

En général, & on ne ſauroit trop le répéter, le ſyſtême des Logarithmes & des nombres auxquels ces Logarithmes répondent, dépend de la ſuppoſition primitive qu'on a faite. Si, par exemple, on prend $AN=1$ (*fig.* 36.), & qu'on ſuppoſe l'origine des Logarithmes en N, on pourra prendre indifféremment les aires poſitives ou négatives du côté de NR, ou du côté de NA; dans le premier cas, la ſuite des abſciſſes ſera $\infty \ldots . 3 . 2 . 1 . o - 1 - 2 - 3 \ldots . - \infty$, & la ſuite des Logarithmes ſera de même forme; dans le ſecond cas, la ſuite des Logar. ſera au contraire $- \infty \ldots - 3 - 2 - 1 . o . 1 . 2 . 3 \ldots . \infty$; les Logarithmes des nombres plus grands que l'unité, ſeront négatifs, & ceux des fractions ſeront au contraire poſitifs. Ce n'eſt donc point une régle générale que les Logarithmes des fractions ſoient négatifs; par la même raiſon qu'on n'eſt pas obligé de ſuppoſer les abſciſſes poſitives de la Logarithmique du côté de AT (*fig.* 35.), & qu'on peut les prendre du côté de AR.

Prenons maintenant l'hyperbole équilatere, dans laquelle l'équation au premier axe eſt $y = \sqrt{xx - aa}$: les ſecteurs de cette hyperbole ſeront, comme l'on ſait, les Log. de $x + \sqrt{xx - aa}$. Or en faiſant $a = 1$, & $x < 1$, cette quantité devient imaginaire, ainſi que le ſecteur hyperbolique; & en faiſant x négative auſſi-bien que $\sqrt{xx - 1}$, & $x > 1$, les ſecteurs hyperboliques redeviennent réels & poſitifs, étant oppoſés au ſommet aux

ſecteurs correſpondans de l'hyperbole oppoſée. C'eſt pourquoi la ſuite des nombres repréſentés par $x + \sqrt{x\,x - 1}$, va d'abord de ∞ à 1, en repréſentant par conſéquent tous les nombres réels: enſuite elle paſſe de 1 à l'imaginaire, juſqu'à ce que $x = -1$: puis elle redevient -1 juſqu'à $-\infty$; & les Logarithmes correſpondans forment une ſuite qui va d'abord de ∞ à o juſqu'au point où $x = 1$, enſuite paſſe par l'imaginaire juſqu'à ce que $x = -1$, & enfin repaſſe de o à ∞.

Voilà donc, dans deux cas différens, deux ſuites de nombres, & deux ſuites de Logarithmes très-différentes, quoique toutes deux aſſujetties à une loi Géométrique. Dans le premier cas, la ſuite de nombres & de Logarith. eſt par-tout réelle; dans le ſecond, les deux ſuites ſont chacune imaginaires en leur milieu. Ces deux exemples, auxquels on pourroit en ajouter une infinité d'autres, ſuffiſent pour prouver que tout ſyſtême de Logarithmes eſt différent, ſuivant la ſuppoſition ſur laquelle ce ſyſtême eſt fondé.

M. de Foncenex prétend avoir renfermé tous les Logarithmes (réels ou imaginaires) dans l'équation ſuivante $\varphi\sqrt{-1} = l\,(x + \sqrt{x\,x - 1})$, ou $\varphi\sqrt{-1} = l\,(\text{cof. }\varphi + \text{ſin. }\varphi\sqrt{-1})$, dans laquelle φ eſt l'angle dont le coſinus eſt x, & $\sqrt{1 - x\,x}$ le ſinus. Dans cette équation, lorſque x eſt > 1, φ devient imaginaire & égal au ſecteur hyperbolique multiplié par $\sqrt{-1}$; de ſorte que $\varphi\sqrt{-1}$ & $x + \sqrt{x\,x - 1}$, ſont alors tous deux réels; & quand $x = -1$, on a $l - 1 = k\,\pi\sqrt{-1}$, π exprimant 180 degrés,

degrés, & k un nombre impair quelconque; ce qui eſt le Théorême de M. Euler. Cette équation de M. de Foncenex, ainſi que le raiſonnement ſur lequel il la fonde, demande pluſieurs réfléxions. 1°. De ce que l'Elément du ſecteur hyperbolique eſt toujours à celui du ſecteur circulaire correſpondant, comme $\sqrt{-1}$ eſt à 1, M. de Foncenex en conclud, que les ſecteurs ſont toujours entr'eux dans ce même rapport. Or cette conſéquence peut être conteſtée, parce que l'addition des conſtantes en intégrant fait que des intégrales peuvent n'être pas entr'elles comme leurs différentielles: & c'eſt en effet ce qui a lieu ici; car on ſait que l'Elément d'un ſecteur circulaire a une infinité d'intégrales, par l'addition continuelle que l'on peut faire de la circonférence répétée tant de fois qu'on voudra. On peut s'aſſurer d'une maniere encore plus poſitive, dans le cas dont il s'agit, que $\varphi\sqrt{-1}$ ne repréſente pas en général le ſecteur hyperbolique; car quand $x = -1$, $\varphi\sqrt{-1}$ eſt $= k\pi\sqrt{-1}$, k marquant un nombre impair quelconque, au lieu que le ſecteur hyperbolique correſpondant eſt $= o$. 2°. Quand même on conviendroit que l'équation propoſée renferme les Logarithmes réels & imaginaires à l'infini, il eſt certain qu'en faiſant x négative & plus grande que 1, $\varphi\sqrt{-1}$ devient réel; & qu'ainſi les Logarithmes des quantités négatives ſe trouvent réels par cette équation. Mais il eſt bien plus naturel de ne regarder l'équation $\varphi\sqrt{-1} = l(\text{cof. } \varphi + \text{ſin. } \varphi\sqrt{-1})$, comme préſentant quelque choſe de net à l'eſprit, que dans la

ſeule ſuppoſition de $x < 1$ & de φ réel. Or dans cette ſuppoſition, qui emporte, comme nous l'avons dit, celle d'une ſoutangente imaginaire de la Logarithmique, on trouve à la vérité que Log. -1 eſt imaginaire; mais on remarquera qu'il n'eſt tel que parce que le nombre réel -1 ſe trouve dans la ſuite infinie repréſentée par cof. $\varphi +$ ſin. $\varphi \sqrt{-1}$, dont tous les termes (ainſi que leurs Logarithmes), ſont imaginaires, excepté dans le cas où cof. $\varphi = 1$ ou -1. A l'égard du cas où cof. $\varphi > 1$; ce cas n'eſt repréſenté, *ni d'une maniere nette, ni d'une maniere exacte*, par l'équation $\varphi \sqrt{-1} = l.(\text{cof. } \varphi + \text{ſin. } \varphi \sqrt{-1})$, ou $\varphi \sqrt{-1} = l(x + \sqrt{x x - 1})$; *d'une maniere nette*, parce que φ eſt alors imaginaire, & qu'on n'a point d'idée nette de la valeur d'un arc de cercle imaginaire φ, ni par conſéquent de $\varphi \sqrt{-1}$; *d'une maniere exacte*, parce que, comme il répond une infinité d'arcs circulaires réels à cof. $\varphi < 1$, il pourroit de même répondre (du moins le contraire n'eſt pas prouvé, & ne ſauroit l'être) une infinité d'arcs de cercle imaginaires à cof. $\varphi > 1$; au lieu que $x > 1$ ne donne jamais qu'un ſeul ſecteur hyperbolique, parce que l'hyperbole eſt une courbe infinie qui ne rentre pas en elle-même. Ainſi l'équation des ſecteurs hyperboliques & celle des ſecteurs circulaires, ſont deux équations abſolument ſéparées, qu'il ne faut point chercher à lier enſemble par une même expreſſion.

II.

M. de Foncenex, pour fortifier ſa théorie ſur les Logarithmes imaginaires, conſidere un corps ou point mobile A (*fig.* 39), pouſſé vers un centre C par une force $= \frac{1}{CP^n}$; & voici le raiſonnement qu'il fait en conſéquence de cette ſuppoſition. Soit, dit-il, $AC = a$, $AP = x$, u la viteſſe en P; on aura $u\,du = \frac{dx}{(a-x)^n}$, & $\frac{uu}{2} = \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{(a-x)^{n-1}} - \frac{1}{a^{n-1}}\right)$; quantité qui eſt toujours réelle & poſitive, tant que n eſt un nombre impair, & qui repréſente en effet la loi de la viteſſe du corps A des deux côtés du point C. Car prenant $Cp = CP$, on trouvera que la viteſſe u en p eſt égale à la viteſſe en P, comme cela doit être en effet, puiſque le corps, après qu'il eſt arrivé au point C, doit repaſſer au-delà avec les mêmes degrés de viteſſe (en ſens contraire), qu'il avoit avant que d'y arriver. Or, ajoute M. de Foncenex, lorſque $n = 1$, la différentielle $u\,du = \frac{dx}{a-x}$ s'intégre par Logarithmes, & devient alors $\frac{uu}{2} = \text{Log.}\frac{a}{a-x}$. Dans le cas où x eſt $> a$, c'eſt-à-dire, où le corps eſt au-delà de C, $\frac{a}{a-x}$ devient négative; & on ne ſauroit dire cependant, ajoute toujours l'Auteur, que Log. $\frac{a}{a-x}$ ſoit imaginaire, puiſ-

que cette quantité exprime la moitié du quarré de la viteſſe u^2, qui par la nature du Problême doit toujours être réelle & poſitive. M. de Foncenex en convient, & il ſemble en cela donner gain de cauſe à M. Bernoulli & à moi. Mais il prétend qu'alors les valeurs de uu, avant & après le paſſage au point C, ne ſont pas unies par le lien de la continuité; parce qu'il y a, dit-il, un *ſaut* dans l'accroiſſement & le décroiſſement de la viteſſe du corps au point C; cette viteſſe étant finie un inſtant avant le paſſage, & redevenant finie un inſtant après. Pour moi je ne vois pas, je l'avoue, pourquoi il y a plus de *ſaut* dans le cas de $n = 1$, que dans celui de n égal à tout autre nombre entier impair, par exemple $= 3$; & il eſt certain que dans ce dernier cas les deux valeurs de uu, de l'aveu même de M. de Foncenex, ſont unies par le lien de la continuité. Dans le cas de $n = 1$, comme dans celui de $n =$ à un nombre impair quelconque, la valeur de u eſt infinie en C, & la viteſſe a également de part & d'autre du point C un accroiſſement & un décroiſſement graduel, & qui reçoit ſucceſſivement toutes les valeurs poſſibles, depuis zéro juſqu'à l'infini.

Je ne prétends point cependant tirer beaucoup d'avantage de cette valeur de uu lorſque $n = 1$, pour appuyer le ſentiment que je ſoutiens ſur la réalité des Logarithmes des quantités négatives. Car je conviens franchement que cette méthode d'argumenter de la ſolution d'un Problême de Méchanique à celle d'une queſtion

de Géométrie, ne me paroît pas fort convaincante; & j'en trouve la preuve dans le Problême dont il s'agit. En effet, ſi on ſuppoſe dans ce Problême $n =$ à un nombre pair quelconque, il eſt aiſé de voir que quand x ſera $> a$, la valeur de uu ſera négative, & par conſéquent celle de u imaginaire; cependant il eſt évident que paſſé le point C, le mobile A aura une valeur réelle; de ſorte qu'en p, par exemple, ſa viteſſe ſera égale à ce qu'elle étoit en P, & dirigée dans le même ſens. Cette contradiction du calcul avec le raiſonnement, & l'impoſſibilité apparente de les concilier, ont fait croire à un très-grand Géometre qu'au point C le corps A *s'anéantiſſoit.* Mais, ſans avoir recours à ce ſingulier dénouement, on peut expliquer le paradoxe d'une maniere bien plus ſimple & bien plus claire. Prenons, par exemple, $n = 2$ pour fixer les idées; il eſt clair qu'on aura $u\,du = \frac{dx}{(a-x)^2}$; par cette équation la valeur de $u\,du$ & par conſéquent celle de du doit être toujours poſitive, ſoit qu'on ait $x < a$, ou $x > a$, c'eſt-à-dire, ſoit que le corps ſoit en deçà ou au-delà du point C. Cependant il eſt évident qu'au-delà du point C la viteſſe décroît, & qu'ainſi du eſt négative. La raiſon pour laquelle le calcul ne peut exprimer la viteſſe u après le paſſage au point C, c'eſt que par l'hypothèſe la force eſt $\frac{1}{(a-x)^2}$, & que cette expreſſion Algébrique eſt toujours poſitive, ſoit que x ſoit $<$ ou $> a$. Cependant paſſé le point C, la force eſt

dirigée en ſens contraire à ce qu'elle étoit auparavant; & il faudroit prendre alors $-\frac{1}{(a-x)^2}$ pour l'expreſſion de la force; & pour l'équation de la viteſſe, $u\,du = \frac{-dx}{(a-x)^2}$, qui donne la valeur de u telle qu'elle doit être. Voilà, ce me ſemble, le dénouement du paradoxe dans ce cas-là, & dans les autres ſemblables. Je reviens à mon ſujet.

On pourroit faire contre l'argument tiré des aires hyperboliques, une objection que voici, & qui paroît avoir échappé à tous ceux qui ont juſqu'ici traité cette matiere.

Soit $AP = x$ (*fig.* 40.), $PM = y$, $AC = a$, & $y = \frac{1}{(a-x)^n}$, n étant un nombre pair poſitif; il eſt viſible que cette équation ſera celle d'une hyperbole du degré n, qui aura pour aſymptote CO, & dont les deux branches BMQ, qmb, ſeront du même côté de l'axe Aa. Il eſt viſible de plus, que l'intégrale de $y\,dx$, ou l'aire $ABMP = \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{(a-x)^{n-1}} - \frac{1}{a^{n-1}}\right)$; & comme les deux branches BMQ, qmb appartiennent à une ſeule & même courbe, il ſemble que cette intégrale devroit exprimer auſſi l'aire $AQqmp$, dans laquelle Ap eſt $> AC$. Cependant elle ne l'exprime pas. Car quand x eſt $> a$, l'intégrale précédente eſt toujours finie, au lieu que l'aire $AQqmp$ eſt infinie, étant compoſée des deux aires infinies $ABQC$, $qmpC$. Voilà donc un exemple où l'équation des aires n'eſt pas aſſujettie à la

loi de continuité, quoique celle des branches le ſoit. Or, dira-t-on, ne pourroit-il pas en être de même de l'hyperbole équilatere?

Je réponds que cet inconvénient n'a lieu que dans le cas où n eſt un nombre entier pair, & nullement dans celui où n eſt un nombre entier impair; or dans le cas de l'hyperbole équilatere, $n = 1$, qui eſt un nombre impair. La raiſon de cette différence entre le cas de n pair & celui de n impair, eſt aſſez facile à appercevoir. Dans le cas de n impair, les deux branches de l'hyperbole ſont de deux différens côtés de l'axe, l'une au-deſſus, l'autre au-deſſous de l'aſymptote; & l'aire $ABQC$, qui eſt $= \infty$ lorſque $x = a$, redevient enſuite finie lorſque x eſt $> a$, parce que l'aire négative ſe retranche de l'aire poſitive; ainſi l'aire $\int y\,dx$, après avoir paſſé du fini à l'infini, redevient enſuite finie, ce qui eſt conforme à la nature des expreſſions Algébriques; il n'eſt donc pas ſurprenant que dans ce cas l'expreſſion Algébrique de l'intégrale donne la vraie valeur de l'aire, ſoit pour le cas de $x < a$, ſoit pour celui de $x > a$. Au contraire dans le cas de $n =$ à un nombre entier pair, les deux branches étant du même côté de l'axe, l'aire qui devient infinie dans le cas de $x = a$, continue de l'être dans le cas de $x > a$. Or il n'y a point d'expreſſion Algébrique, ou de fonction de x, qui étant infinie dans le cas où x a une certaine valeur, puiſſe continuer de l'être dans le cas où x aura une autre valeur quelconque plus grande ou plus petite. On ne doit donc pas s'étonner que l'expreſſion Algébrique ne puiſſe

en ce cas repréſenter l'aire qui répond à une abſciſſe quelconque.

Si l'aire $ABQC$ étoit finie, les deux branches étant toujours du même côté de l'axe, alors le même inconvénient ne ſubſiſteroit plus, & l'expreſſion Algébrique indiqueroit également en ce cas les deux aires $APMB$, $ApmOB$. Soit, par exemple $y = \frac{1}{(a-x)^{\frac{2}{3}}}$; on aura l'aire $APMB = -3\overline{a-x}^{\frac{1}{3}} + 3a^{\frac{1}{3}}$; l'aire $ABQC = 3a^{\frac{1}{3}}$; & l'aire $ABQqmp = 3a^{\frac{1}{3}} + 3\sqrt[3]{Cp}$, comme elle l'eſt en effet. Cet exemple prouve clairement que l'inconvénient propoſé vient uniquement de ce que l'aire étant infinie en C, continue de l'être par-delà.

Au reſte, il eſt à remarquer que dans ce cas-là même il ne manque à l'expreſſion Algébrique qu'une conſtante infinie, ſavoir $\frac{2}{n-1}\left(\frac{1}{0^{n-1}}\right)$, pour rendre l'intégrale égale à l'aire cherchée, lorſque $x > a$. C'eſt pourquoi ſi les deux équations, qui repréſentent les aires $ABMP$, $ABQqmp$, ne ſont pas exactement la même, elles ne different au moins que par cette conſtante infinie, qui ſeule, comme on vient de le dire plus haut, les empêche d'être unies par la loi de la continuité.

III.

A l'occaſion de ces Logarithmes des quantités négatives, je dirai auſſi un mot ſur la forme des quantités imaginaires

imaginaires, dont il eſt queſtion dans le même Mém. de M. de Foncenex. J'ai donné le premier, & M. Euler a donné après moi, par une méthode tout-à-fait ſemblable, la maniere de réduire toute quantité imaginaire à $A+B\sqrt{-1}$, A & B étant réelles. J'ai employé pour cette recherche, comme M. Euler l'a fait auſſi, le calcul différentiel; non que je n'euſſe pû très-bien m'en paſſer; mais parce que cette méthode m'a paru plus analytique & plus directe qu'aucune autre, ne ſuppoſant abſolument aucune connoiſſance préliminaire de la réduction des arcs de cercle à des Logarithmes imaginaires; car j'avoue que par le moyen de cette réduction que M. de Foncenex ſuppoſe, on peut ſe paſſer du calcul différentiel; en remarquant cependant que cette réduction même ſuppoſe ce calcul, au moins implicitement.

M. de Foncenex prétend auſſi que la démonſtration que j'ai donnée dans les Mémoires de l'Académie de Berlin de 1746, de la réduction de toutes les racines imaginaires des équations, à $A+B\sqrt{-1}$, & que M. de Bougainville a très-bien développée dans ſon *Traité du Calcul intégral*, n'eſt pas aſſez rigoureuſe, parce qu'elle procéde par le moyen des ſeries. La valeur imaginaire, dit-il, qu'on trouve par cette méthode, n'étant qu'approchée, on pourroit ſoupçonner que la quantité qu'on néglige, quelque petite qu'elle ſoit, eſt préciſément celle qui empêche qu'on ne puiſſe exprimer l'inconnue par une expreſſion finie. On eſt d'autant plus à portée de former ce doute, ajoute M. de Foncenex, que, comme

M. d'Alembert l'a fait voir, il arrive ſouvent qu'un terme qu'on croyoit pouvoir négliger dans une ſerie, eſt cependant celui qui la fait changer de nature.

Ma réponſe à cette objection eſt bien ſimple. J'ai démontré rigoureuſement; 1°. que ſi on ſuppoſe que l'abſciſſe x d'une courbe ſoit très-petite, l'ordonnée correſpondante (ſuppoſée réelle) peut être repréſentée par une ſerie infinie, & extrêmement convergente, telle enfin que plus on prendra de termes de cette ſerie, plus on approchera de la vraie valeur de l'ordonnée, enſorte qu'on en pourra approcher auſſi près qu'on voudra; 2°. que ſi l'ordonnée eſt imaginaire, on trouvera toujours une quantité $A + B\sqrt{-1}$ égale à la ſomme d'un nombre quelconque de termes de la ſerie, & que les quantités A, B, ſeront repréſentées par une ſerie très-convergente, puiſque les changemens que reçoivent A & B, à chaque nouveau terme qu'on prend de la ſerie, ſont du même ordre que ce nouveau terme qui va toujours en décroiſſant très-rapidement; d'où il s'enſuit que les quantités A, B, demeurent toujours réelles, finies, & ſont repréſentées chacune par une ſuite très-convergente, dont tous les termes ſont réels. Donc la ſomme de chacune de ces ſuites, c'eſt-à-dire, à proprement parler, la limite de la ſomme d'un nombre quelconque de termes, eſt réelle; donc il y a toujours deux quantités réelles poſſibles A, B, telles que $A + B\sqrt{-1}$ repréſentera la ſomme de la ſuite *infinie* qui exprime la valeur de x. Je dis de la ſuite *infinie*, ce qui fait voir

qu'on ne *néglige aucun terme* dans cette démonſtration, comme le croit M. de Foncenex. Il eſt bien vrai, que comme on ne peut ſuppoſer la ſerie actuellement pouſſée à l'infini, on ne peut jamais trouver par le calcul que des valeurs approchées de A & de B; mais comme ces valeurs ſont toujours réelles, & formées par une ſuite très-convergente, on en conclud avec raiſon (ce qui eſt évident par ſoi-même), que la limite de ces valeurs, qui eſt la vraie valeur de A & de B, eſt auſſi une quantité réelle. Ma démonſtration eſt donc très-rigoureuſe. Je conviens ſeulement avec M. de Foncenex qu'elle eſt indirecte, étant tirée de la conſidération des courbes; mais ce léger inconvénient eſt compenſé par la ſimplicité & la ſingularité de la démonſtration, qui ne ſuppoſe preſqu'aucun calcul, & qui eſt d'ailleurs d'un genre aſſez neuf.

La démonſtration que M. de Foncenex donne du même Théorême, eſt plus directe que la mienne, étant déduite de la ſeule conſidération des équations: elle eſt d'ailleurs fort ingénieuſe & fort ſimple; elle ſuppoſe uniquement cette propoſition, que ſi on a une équation d'un degré quelconque s, & dont par conſéquent les racines ſoient au nombre de s, l'équation qui renfermera la ſomme des racines de ces équations priſes deux à deux, aura autant de racines qu'on peut combiner de fois deux à deux un nombre s de quantités. Cela paroît en effet très-naturel; mais en même-temps cela doit-il être ſuppoſé ſans démonſtation? Il eſt bien vrai que la combinaiſon de s racines priſes deux à deux, ne peut jamais donner

qu'un nombre $= \frac{s.(s-1)}{2}$; mais s'enſuit-il que l'équation qui donne les valeurs de la ſomme de ces racines priſes deux à deux, ſera préciſément du degré $\frac{s.(s-1)}{2}$? Ne ſeroit-il pas poſſible que l'équation eût pluſieurs racines égales, ou bien que parmi les combinaiſons des racines priſes deux à deux, il y en eût qui donnaſſent des ſommes égales? Dans le premier cas l'équation pourroit être d'un degré plus grand que $\frac{s.(s-1)}{2}$, ſans avoir cependant réellement un nombre de racines plus grand que $\frac{s.(s-1)}{2}$; dans le ſecond cas, l'équation pourroit être d'un degré plus petit que $\frac{s.(s-1)}{2}$, & renfermer cependant toutes les ſommes des racines priſes deux à deux. Il falloit donc démontrer, & ne pas ſe contenter de le ſuppoſer, que l'équation dont il s'agit, eſt du degré $\frac{s.(s-1)}{2}$. Cela eſt d'autant plus néceſſaire, que ſi on ſe bornoit à la conſidération des racines d'une équation, pour déterminer le degré dont elle doit être, on ſeroit ſouvent expoſé à tomber dans l'erreur. Soit, par exemple, l'équation du quatriéme degré $x^4 + ax^2 + bx + c = o$, dont le ſecond terme eſt évanoui, & dont les racines ſont ſuppoſées imaginaires; il eſt certain que ces racines pourront être repréſentées par les quatre quantités $A + B\sqrt{-1}$, $A - B\sqrt{-1}$, $-A + C\sqrt{-1}$,

$-A-C\sqrt{-1}$; de sorte que si on suppose $p+q\sqrt{-1}$ pour l'expression générale de la racine, il semble que l'équation en p doive avoir quatre racines tout au plus, savoir deux égales & positives $+A$, & deux égales & négatives $-A$. Ainsi l'équation en p semble naturellement devoir être du quatrieme degré. Cependant si on substitue dans l'équation x^4+ax^2+bx+c, la quantité $p+q\sqrt{-1}$ à la place de x, & qu'on en fasse deux équations séparées, dans l'une desquelles soient les quantités réelles, & dans l'autre les quantités imaginaires, on parviendra à une équation en p qui sera du sixiéme degré. Je sais bien qu'on peut expliquer ce paradoxe, en disant que la supposition qu'on a faite de $x=p+q\sqrt{-1}$, n'emporte point la conséquence nécessaire que p & q soient réels : par exemple, si x étoit égale à $A+B\sqrt{-1}$, p pourroit être égale à A ou à $B\sqrt{-1}$, & $q=B$, ou $-A\sqrt{-1}$; de sorte que les valeurs de p & de q peuvent être renfermées dans une équation qui ait plus de racines qu'on ne lui en croiroit d'abord, quelques-unes de ces racines étant imaginaires. Mais en ce cas, je demande pourquoi il n'arrive pas la même chose dans les équations du second degré ; car si on a $xx+ax+b=o$, x ayant ses valeurs imaginaires, & qu'on fasse $x=p+q\sqrt{-1}$, on trouvera par une méthode semblable à la précédente, $p=-\frac{a}{2}$, & $q=\sqrt{-\frac{a^2}{4}+b}$; pourquoi ne trouve-t-on pas aussi $p=\sqrt{-b+\frac{a^2}{4}}$,

$p = -\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$, $q = \frac{a}{2}\sqrt{-1}$? Les exemples & les raiſonnemens précédens ſuffiſent pour prouver que dans cette matiere, on ne doit point admettre ſans démonſtration toute conſéquence, du nombre des racines d'une équation, au degré dont cette équation doit être. Je ne prétends pas pour cela que la propoſition ſuppoſée par M. de Foncenex, ſoit fauſſe; je ſuis même très-porté à la croire vraie; mais il me ſemble qu'elle a beſoin d'être démontrée.

Fin du ſixiéme Mémoire & du Supplément.

SEPTIÉME MÉMOIRE.

Supplément aux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Pruſſe de 1746 *&* 1748.

DANS ces Mémoires j'ai donné la méthode de réduire à la rectification des Sections coniques, & à la quadrature des courbes du troiſiéme genre, un grand nombre de différentielles aſſez compliquées. Je vais dans cet Ecrit faire l'application de ces méthodes à la quadrature de la ſurface des cônes obliques; matiere qu'un Géometre très-célébre a déja traitée dans les *Nouv. Mém. de Peterſb.* To. I, mais en réduiſant la quadrature de cette ſurface à la rectification d'une ligne du ſixiéme ordre.

Avant que d'entrer dans ce détail, je donnerai ici quelques remarques ſur les différentielles qui ſe rapportent à la rectification des Sections coniques, pour ſimplifier à quelques égards certaines formules de mon Mémoire de 1746.

Je remarquerai donc d'abord que la différentielle $\frac{d z \sqrt{z}}{\sqrt{z z + b b}}$ dépend de la rectification de l'hyperbole

ſeule; car cette différentielle (voyez les Mémoires de Berlin de 1746, p. 208 & 209), ſe change (en faiſant $z + \sqrt{zz+bb} = y$) en $-\frac{bb\,dy}{\sqrt{2}.y\sqrt{y}.\sqrt{yy-bb}}$ $+\frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{2}.\sqrt{yy-bb}}$, dont la premiere dépend de la ſeconde, & dont la ſeconde dépend de la rectification de l'hyperbole ſeule.

De-là & des autres formules du même Mémoire, il s'enſuit; 1°. que $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{Azz+B}}$, B & A étant des quantités de ſigne quelconque, pourvû qu'elles ne ſoient pas toutes deux négatives, dépendent de la rectification de l'hyperbole ſeule; 2°. que par conſéquent $z^{+\frac{1}{2}\pm 2f}\,dz \times (B+Azz)^{\frac{+p}{2}}$, p & f exprimant des nombres entiers quelconques, dépend auſſi de cette ſeule rectification; car on a fait voir dans le Mémoire cité, que cette différentielle dépend de $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{Azz+B}}$. Il en eſt de même de $\frac{z^{\frac{1}{2}\pm 2f}\,dz}{\sqrt{Azz+B}}$.

A l'égard de $\frac{dz}{\sqrt{z}.\sqrt{zz+bb}}$, cette différentielle dépend de la rectification de l'ellipſe & de l'hyperbole; & par conſéquent auſſi $\frac{z^{-\frac{1}{2}\pm 2f}}{\sqrt{zz+bb}}$, & ainſi du reſte; ſur quoi je renvoye au Mémoire déja cité.

On

On peut réduire à la rectification des Sections coniques celle de la premiere Parabole cubique ; car l'Elément de cette Parabole eſt $dx\sqrt{x^4+1}$, qui dépend de $\frac{dz\sqrt{zz+1}}{\sqrt{z}}$, ou de $\frac{z\,dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz+1}} + \frac{dz}{\sqrt{z}\cdot\sqrt{zz+1}}$. Or, comme nous l'avons fait voir dans le Mémoire cité, la premiere de ces différentielles dépend de la ſeconde, & la ſeconde de la rectification de l'ellipſe & de celle de l'hyperbole. Donc &c. Ainſi la rectification de la premiere Parabole cubique, ne dépend pas de la rectification de l'hyperbole ſeule, comme le croyoit M. Leibnitz. Voyez les Œuvres de M. Jean Bernoulli, To. 1. p. 137.

J'ai démontré, p. 216 des Mémoires de Berlin 1746, que la différentielle $\frac{du\sqrt{uu+2p'au+aa}}{u\sqrt{u}}$ dépend de la rectification de l'hyperbole ſeule, pourvû que $p=\frac{q-1}{q+1}$, q étant le rapport du parametre au premier axe ; on tire de cette équation $q=\frac{-p-1}{p-1}$; & comme q doit être poſitif, & que par conſéquent p ne peut pas être ſuppoſé d'une valeur quelconque, on voit que l'équation précédente eſt limitée ; mais il eſt aiſé de s'aſſurer en général, & par une autre méthode, que $\frac{du\sqrt{uu\pm fu+bb}}{u\sqrt{u}}$ dépend de la rectification de la ſeule hyperbole. Car il eſt évident que cette quantité eſt

$= \frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{uu \pm fu + bb}} \pm \frac{f\,du}{u\sqrt{uu \pm fu + bb}}$

$+ \frac{bb\,du}{\sqrt{u}.\sqrt{uu \pm fu + bb}}$; dont l'intégrale eſt —

$\frac{2\sqrt{uu \pm fu + bb}}{\sqrt{u}} + 2\int \frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{uu \pm fu + bb}}$

$\pm \int \frac{f\,du}{\sqrt{u}.\sqrt{uu \pm fu + bb}}$. Or on trouvera que

$2\int \frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{uu \pm fu + bb}} \pm \int \frac{f\,du}{\sqrt{u}.\sqrt{uu \pm fu + bb}}$

dépend de l'hyperbole ſeule, parce qu'en faiſant les transformations preſcrites pag. 206 & 208 des Mémoires de Berlin de 1746, les quantités qui dépendent de la rectification de l'ellipſe, ſe détruiront dans la transformée ; car ſoit, par exemple, $u \pm \frac{f}{2} = z$, $AA = bb - \frac{ff}{4}$, & $z + \sqrt{zz + AA} = y$, on aura pour transformée

$\frac{2\,dy\sqrt{y}}{\sqrt{2}.\sqrt{yy - AA \mp fy}} - \frac{2\,AA\,dy}{\sqrt{2}.y\sqrt{y}.\sqrt{yy - AA \mp fy}}$,

qui ſe réduit à la rectification de l'hyperbole &c.

De la ſurface des Cônes obliques.

Soit E (*fig.* 41.) le ſommet d'un cône quelconque, la courbe RAM ſa baſe, $EF = b$ la hauteur du cône, $FP = t$, $PM = y$; ayant mené la tangente MH, & du point F la perpendiculaire FH ſur MH, on trouvera que $EH \times \frac{M\,m}{2}$ eſt l'Elément de la ſurface conique :

donc cet Elément exprimé algébriquement, ſera

$$\sqrt{dt^2+dy^2}\times\sqrt{bb+\left(t-\frac{y\,dt}{dy}\right)^2}\,\frac{dy^2}{dt^2+dy^2}$$

$$=\sqrt{bb\,dt^2+bb\,dy^2+t\,dy-y\,dt^2}.$$ Cela poſé;

Soit la baſe du cône RAM un cercle dont C ſoit le centre; $CA=a$, ou $=1$, $CF=c$, $CP=z$; on aura $y=\sqrt{aa-zz}$; $t=c-z$; $-dt=dz$; & l'Elément de la ſurface conique ſera $-\frac{dz\sqrt{bb+1-cz^2}}{\sqrt{1-zz}}$. Soit $1-z=u$, & $u=\frac{1}{x}$; & ſoit de plus $bb+c-1^2=A$, $-2cc+2c=B$: on trouvera que l'Elément dont il s'agit eſt

$$\frac{-dx\sqrt{cc+Bx+Axx}}{xx\sqrt{2x-1}}=\frac{-ccdx}{xx\sqrt{2x-1}\cdot\sqrt{cc+Bx+Axx}}-\frac{\frac{Bdx}{x\sqrt{2x-1}\cdot\sqrt{cc+Bx+Axx}}-\frac{Adx}{\sqrt{2x-1}\cdot\sqrt{cc+Bx+Axx}}}{}:$$

or $\frac{ccdx}{xx\sqrt{2x-1}\cdot\sqrt{cc+Bx+Axx}}=$ (Mém. Acad. Berl. 1748.) $d\left[(x^{-1})\sqrt{2x-1}\cdot\sqrt{cc+Bx+Axx}\right]+\frac{(2cc-B)dx}{2x\sqrt{2x-1}\cdot\sqrt{cc+Bx+Axx}}-\frac{-2Axdx}{\sqrt{2x-1}\cdot\sqrt{cc+Bx+Axx}}$:

de-là il eſt aiſé de conclure, comme il eſt démontré dans les Mémoires de Berlin de 1748, que la quadrature de la ſurface d'un cône circulaire oblique dépend de la rectification des Sections coniques, & de la quadrature d'une courbe du troiſiéme genre, dont l'ordon-

née est $\sqrt{2-u} \times \frac{\sqrt{c\,c\,u\,u + B\,u + A}}{\sqrt{u}}$, en supposant $x = \frac{1}{u}$, comme ci-dessus. Or il est aisé de trouver, par une construction Géométrique, l'ordonnée de cette courbe. Car elle sera $\frac{P\,M}{A\,P} \times E\,H$.

COROLLAIRE.

La quadrature de la surface conique ne dépendra plus de celle d'une courbe du troisiéme genre, si $-B + \frac{B}{2} - c\,c = o$, c'est-à-dire, si $B = -2\,c\,c$; or $B = -2\,c\,c + 2\,c$; donc $c = o$; ce qui est le cas du cône circulaire droit; en effet l'Elément de la surface devient pour lors $\frac{-d\,z\,\sqrt{b\,b+1}}{\sqrt{1-z\,z}}$, & se réduit à la rectification du cercle; ce qu'on savoit d'ailleurs: dans tout autre cas la quadrature de la surface conique dépendra de celle d'une courbe du troisiéme genre.

De la Surface d'un Cône qui a pour base une Ellipse.

I.

Soit maintenant $R\,A\,M$ une ellipse, dont $C\,A$ soit un des demi axes, C le centre, e le demi axe conjugué à $C\,A$; on trouvera, par une méthode semblable, que l'Elément de la surface conique est . . . . . .

$$-\frac{d\zeta\sqrt{bb\left(aa+\frac{ee}{aa}-1\cdot\zeta\zeta\right)+ea-\frac{ec\zeta}{a}^{2}}}{\sqrt{aa-\zeta\zeta}};$$

Or en premier lieu si $c=o$, c'eſt-à-dire, ſi le cône eſt droit, l'Elément ſera $-\frac{dz\sqrt{(b^2+e^2)a^2+\frac{e^2}{aa}-1.b^2\zeta^2}}{\sqrt{aa-\zeta\zeta}}$.

Cette derniere quantité peut être ſuppoſée égale à $-d\zeta\sqrt{b^2+e^2}.\frac{\sqrt{a^2+\frac{e^2}{a^2}-1.\zeta\zeta}}{\sqrt{aa-\zeta\zeta}}$, ($e$ étant une conſtante que nous allons déterminer), c'eſt-à-dire = à $\sqrt{b^2+e^2}$ multiplié par un arc d'ellipſe, dont les demi axes ſont a & e. D'où l'on tire $\frac{e^2}{a^2}-1=\frac{\frac{e^2b^2}{a^2}-b^2}{bb+ee}$; & par conſéquent $\frac{e^2}{a^2}=\frac{\frac{e^2b^2}{a^2}+e^2}{bb+ee}$; donc on aura le ſecond axe e de l'ellipſe, dont la rectification donnera la quadrature de la ſurface conique.

II.

Il eſt viſible que la quadrature de la ſurface conique propoſée ſe réduira à celle du cercle, dans les cas où on pourra faire enſorte que le radical du numérateur ſoit un quarré; car alors l'Elément ſera $-\frac{d\zeta(R+S\zeta)}{\sqrt{aa-\zeta\zeta}}$; or cela arrivera lorſque $e^4ccaa=(eecc+eebb-aabb)$

$(bbaa+eeaa)$; d'où l'on tire $cc=\frac{(a^4-e^4)(bb+ee)}{ee}$; & par conſéquent la quadrature de la ſurface conique ſe réduira à celle du cercle, lorſque c^2 aura cette valeur, qui eſt évidemment toujours réelle & poſitive, du moins lorſque $e<a$, c'eſt-à-dire, lorſque $2e$ eſt le petit axe de l'ellipſe.

III.

Barrow dans ſes *Lectiones Geometricæ*, a fait voir que la quadrature de la ſurface d'un cône elliptique, ſe réduiſoit à celle du cercle, lorſque ce cône faiſoit partie d'un cône circulaire droit. On en peut voir la démonſtration abrégée à la fin de l'article *Cône* de l'Encyclopédie. Or on peut prouver auſſi que ce cas revient au précédent: car ſoit $DB=b$ (*fig.* 42.), $BC=c$, $FO=2a$ l'axe de l'ellipſe : ſoit menée la perpendiculaire OG à DF, & ſoit priſe $DH=DO$; enſuite par les points C & F, ſoient tirées SR, FT parallèles à OH; il eſt viſible que ſi l'ellipſe fait portion d'un cône droit, la Section paſſant par SR ſera un cercle, & qu'on aura le quarré du demi axe de l'ellipſe $ee=SC\times CR=\frac{OH\times FT}{4}=\frac{OH^2\times DF}{4DH}=\frac{OH^2\times DF}{4DO}=\frac{(OG^2+\overline{FG-FH}^2).DF}{4DO}=\left[\frac{FO^2\cdot DB^2}{DF^2}+\left(\frac{FO.BF}{DF}-DF+DO\right)^2\right]\times\frac{DF}{4DO}$; d'où l'on tire $ee=\frac{aa-bb-cc}{2}+\frac{4aabb-4a^2c^2+2a^4+2b^4+4b^2c^2+2c^4}{4\sqrt{bb+c+a}\cdot\sqrt{bb+c-a}}$.

Or le dénominateur de la seconde partie du second membre $= \sqrt{b^4 + 2bbcc + c^4 + 2aabb - 2aacc + a^4}$; par conséquent on aura $ee = \frac{aa - bb - cc}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^4 + 2bbcc + c^4 + 2aabb - 2aacc + a^4}$; or cette valeur de ee seroit précisément celle qu'on tireroit de l'équation ci-dessus $cc = \frac{(aa - ee)(bb + ee)}{ee}$.

Donc &c.

IV.

La quadrature de la surface conique, qui a pour base une ellipse, se réduit à la rectification des Sections coniques, lorsque le coëfficient de zz dans le radical du numérateur est $= o$, c'est-à-dire lorsque $\frac{eecc}{aa} + \frac{bbee}{aa} - bb = o$. D'où l'on tire $bb = \frac{eecc}{aa - ee}$.

V.

Dans le cas dont on vient de parler, l'Elément de la surface conique se réduira à $- \frac{dz\sqrt{bbaa + eeaa - 2ce^2z}}{\sqrt{aa - zz}}$; & cet Elément seroit même réductible à la rectification du cercle, si $bbaa + eeaa - 2ce^2z$ étoit un multiple de $a - z$. Or cette condition donne $2ce^2 = bba + eea$; & mettant pour bb sa valeur $\frac{eecc}{aa - ee}$, on trouveroit $2c = \frac{acc}{aa - ee} + a$, ou $cc - 2c\frac{(aa - ee)}{a}$

$= ee - aa$. Or la valeur de $bb = \frac{eecc}{aa - ee}$, demande que a ſoit $> e$; ainſi ſoit $aa - ee = paa$, p étant un nombre quelconque plus petit que l'unité, on aura $c = pa \pm a\sqrt{pp - p}$. Donc puiſque p eſt < 1, la valeur de c eſt imaginaire. Ainſi $bbaa + eeaa$ ne peut jamais être égal à $2ce^2$.

VI.

Puiſque $bbaa + eeaa$ n'eſt jamais égal à $2ce^2$, on ſuppoſera $\frac{bbaa + eeaa}{2ce^2} - z = s$, & $\frac{bbaa + eeaa}{2ce^2} = M$, & la différentielle ſe changera en $\frac{-ds\sqrt{2ce^2}.\sqrt{s}}{\sqrt{aa - MM + 2Ms - ss}}$, qui dépendra de la rectification de l'ellipſe ſeule, ſi $aa - MM$ eſt une quantité négative, c'eſt-à-dire, ſi $bbaa + eeaa > 2ce^2$, & de la rectification de l'hyperbole ſeule, ſi $MM < aa$, c'eſt à dire, ſi $bbaa + eeaa < 2ce^2$. Voyez les Mém. de l'Acad. de Berlin 1746.

VII.

Reprenons maintenant l'équation générale de l'Elément de la ſurface conique, qui a pour baſe une ellipſe; & nous trouverons encore que cet Elément dépend de la quadrature des Sections coniques, lorſque le radical du dénominateur aura une racine commune avec le radical du numérateur; or on trouve que les deux facteurs du numérateur ſont $z - \frac{eecaa}{eecc + e^2b^2 - b^2a^2} \pm a$

$\pm \frac{a\sqrt{-eeccbbaa+(a^2b^2-e^2b^2)(bbaa+e^2a^2)}}{eecc+eebb-b^2a^2}$;

& ceux du dénominateur ſont $a-z$ & $z+a$; on aura donc pour l'équation de condition $\frac{\mp eecaa}{eecc+e^2b^2-b^2a^2}$.

$\pm \frac{a\sqrt{-eeccbbaa+(a^2b^2-e^2b^2)(bbaa+e^2a^2)}}{eecc+eebb-b^2a^2} = \pm a$;

d'où l'on tire $(eecc+eebb-bbaa-eeca)^2 = -eeccbbaa = (a^2b^2-e^2b^2)\times(bbaa+eeaa)$, ou $e^2(b^4+c^4+bbaa+ccaa-2bbca-2c^3a+2ccbb) - b^4a^2-ccbbaa-a^4b^2+2bbca^3 = o$. Donc $e^2 = \frac{bbaa(bb+\overline{c-a}^2)}{cc-\overline{ca}^2+bb(bb+cc+\overline{c-a}^2)}$. Il eſt facile de voir dans cette équation que $(bb+\overline{c-a}^2)$ eſt plus petit que le dénominateur; & qu'ainſi e^2 ſera $< a^2$, c'eſt-à-dire que $2a$ ſera le grand axe de l'ellipſe.

VIII.

Si dans l'expreſſion de l'Elément de la ſurface conique, on ſuppoſe, comme ci-deſſus, $1-z = u$, & $u = \frac{1}{x}$, on trouvera, comme dans le cas de la ſurface conique circulaire, que la quadrature de la ſurface conique elliptique dépend de la rectification des Sections coniques, & de la quadrature d'une courbe du troiſiéme genre; l'Elément ſera, en prenant u pour variable, $\frac{du}{\sqrt{u}\cdot\sqrt{2-u}}\times\sqrt{bb(1+ee-1.\overline{1-u}^2)+e-ec+eu}$;

or ſoit $bb + e - ec = A$, $-2bb(ee-1)+2c(e-ec) = B$, & $bb(ee-1)+cc = CC$, on aura pour l'ordonnée de la courbe du troiſiéme genre $\sqrt{CCuu+Bu+A} \times \frac{\sqrt{2-u}}{\sqrt{u}}$. La quadrature de la ſurface conique ne dépendra plus de celle de cette courbe, ſi $B = -2CC$, c'eſt-à-dire, ſi $-2cc = 2ce - 2cc$, ou, ce qui revient au même, ſi $c = \frac{e}{e-1}$. D'où l'on voit que e doit être > 1, c'eſt-à-dire, que e doit être le demi grand axe de l'ellipſe, & qu'outre cela, on doit avoir $c : a :: e : e - a$.

IX.

Si l'on fait $u = \frac{1}{x}$, on trouvera que la partie qui dépend de la rectification des Sections coniques, eſt $-\frac{A\,dx}{\sqrt{2x-1}\cdot\sqrt{CC+Bx+Axx}} + \frac{2\,A\,x\,dx}{\sqrt{2x-1}\cdot\sqrt{CC+Bx+Axx}}$; ſoit $2x - 1 = t$, & ces deux quantités deviendront $\frac{A\,dt\sqrt{t}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{CC+\frac{Bt}{2}+\frac{Att}{4}+\frac{B}{2}+\frac{A}{4}+\frac{At}{2}}}$; qui dépend de la rectification de l'hyperbole ſeule, ſi $\frac{B}{2}+\frac{A}{4}+CC$ eſt une quantité négative, ou ſi $Bt+At = o$, c'eſt-à-dire, ſi $B = -A$; & ainſi du reſte.

X.

Juſqu'ici nous avons ſuppoſé que la perpendiculaire

EF tomboit sur un point F de l'axe CF prolongé. Mais si le point F où tombe la perpendiculaire, n'étoit pas dans l'axe, alors menant par ce point F une ligne FC (*fig.* 43.) parallèle à l'axe, & menant du centre G de l'ellipse une ligne GC perpendiculaire à FC, qui rencontre cette ligne FC en C, on aura, en conservant les mêmes noms que ci-dessus, l'Elément de la surface conique égal à une quantité de cette forme $-\frac{dz\sqrt{A+Bzz+Cz+L\sqrt{1-zz}\,(1+Rz)}}{\sqrt{1-zz}}$ quantité qui peut se simplifier en différentes occasions. Par exemple, si c étoit $=0$, c'est-à-dire, si le point F tomboit sur le point C, l'Elément seroit alors de cette forme $\frac{-dz}{\sqrt{aa-zz}}\times\sqrt{A+Bzz+L\sqrt{aa-zz}}$; or en faisant $\sqrt{a\,a-z\,z}=u$, cette quantité devient de la forme $\frac{du}{\sqrt{aa-uu}}\times\sqrt{K+Lu^2+Mu}$, qui dépend aussi de la rectification des Sections coniques & de la quadrature d'une courbe du troisiéme genre; comme on le voit aisément en faisant $a=1$, $1-u=s$, & $s=\frac{1}{q}$, & en employant une méthode semblable à celle dont nous nous sommes servis pour trouver la surface d'un cône circulaire oblique. Mais en voilà assez sur cette matiere.

Fin du septiéme Mémoire.

ADDITION

Au Mémoire précédent.

EN ouvrant les Mémoires de Berlin de 1756, je trouve un ſavant Ecrit de M. Euler, qui a pour titre, *Expoſition de quelques Paradoxes ſur le Calcul intégral.* Le premier de ces Paradoxes conſiſte dans certaines équations différentielles, dont on trouve l'intégrale en les différentiant de nouveau. Si on jette les yeux ſur les équations que M. Euler apporte en exemple de ce Paradoxe, on verra facilement qu'en faiſant $\frac{dx}{dy} = z$, elles peuvent être toutes renfermées ſous la forme générale $x - yz = \Delta z$, Δz déſignant une fonction quelconque de z ou de $\frac{dx}{dy}$. Or j'avois déja fait cette curieuſe remarque (à la vérité en peu de mots) dans les Mémoires de Berlin 1748, p. 276, Art. XXVIII. Voici ce que j'ai dit dans ces Mémoires. Si $x = yz + \Delta z$, *l'équation appartient en même-tems à une ligne droite & à une ligne courbe. Car la différentiation donne* $(y + \Gamma z)\, dz = 0$; *d'où l'on tire, ou bien* $dz = 0$, *qui appartient à une ligne droite, ou bien* $y = -\Gamma z$, *qui eſt à une ligne courbe.*

On voit donc que dès 1748 (& même dès 1747, comme le prouve la date du Mémoire), j'avois conſidéré les

équations dont il eſt queſtion, & dont la propriété eſt d'appartenir en même-tems à une ligne droite & à une ligne courbe, & d'être intégrées par la différentiation. Je ne prétends point au reſte diſputer à M. Euler l'avantage d'avoir auſſi fait cette remarque, qui vraiſemblablement lui avoit échappé dans mon Mémoire de 1748; puiſqu'il ne l'a point cité. Mais comme ce grand Géometre l'a jugée digne d'être expoſée en détail dans un Mémoire exprès, je crois pouvoir obſerver que je ſuis le premier qui l'aye faite. A l'égard des autres paradoxes dont il eſt queſtion dans le ſavant Mémoire de M. Euler, je lui dois la juſtice que perſonne ne les avoit remarqués avant lui.

Fin du ſeptiéme Mémoire & de l'Addition.

HUITIÉME MÉMOIRE.

Remarques ſur quelques queſtions concernant l'attraction.

I.

J'AI dit dans mes *Recherches ſur la cauſe générale des Vents*, Art. 31, p. 42, que ſi la Terre eût été un ſphéroïde allongé, il n'eût pas été néceſſaire d'avoir recours, pour expliquer ce phénomene, comme l'ont fait quelques Auteurs, à un noyau intérieur allongé; & qu'il auroit pû ſe faire qu'avec un noyau intérieur applati, la Terre eût été allongée vers les pôles. Cette vérité eſt une ſuite néceſſaire & immédiate des formules que j'ai données au même endroit que je viens de citer. Cependant un Géometre Italien, qui a du nom dans les Mathématiques, l'a attaquée par cette conſidération, que ſi le noyau intérieur étoit applati, & qu'on dérangeât le fluide extérieur de ſon état d'équilibre, il n'y reviendroit jamais, au lieu qu'il y reviendroit de lui-même, ſi le noyau intérieur étoit allongé; d'où il conclud que

cette derniere hypothèse est la seule propre à rendre raison de l'équilibre.

Je pourrois d'abord répondre que dans toutes les recherches qu'on a faites jusqu'ici sur la *Figure de la Terre*, il n'a jamais été question que de l'état d'équilibre; & que jusqu'à ce Géometre, on n'avoit point encore pensé à y ajouter cette condition, que le fluide dérangé de cet état, se rétablît de lui-même. Ainsi, en partant de la maniere ordinaire d'envisager cette question, je ne devois point, ou du moins je n'étois pas obligé à faire entrer cette considération nouvelle dans mon calcul. Cependant, à l'exemple du Géometre dont je viens de parler, je vais y avoir égard, & je prouverai qu'il n'est pas nécessaire, dans cette hypothèse même, que le sphéroïde intérieur soit allongé, pour que la Terre le soit.

Pour ne point répéter ce que j'ai dit ailleurs, je conserverai les mêmes noms que dans l'art. 31 déja cité des *Recherches sur les Vents*; j'appellerai r le rayon du sphéroïde tant intérieur qu'extérieur, parce qu'on suppose que le fluide qui couvre le noyau intérieur, ait très-peu de hauteur par rapport au rayon de ce noyau; α' la différence des axes du noyau, α celle du sphéroïde extérieur, φ la force centrifuge à l'équateur, p la pesanteur, Δ la densité du noyau, & δ celle du fluide; & on aura dans le cas de l'équilibre $\frac{\varphi r}{2p} + \frac{3\delta\alpha + 3\alpha'(\Delta - \delta)}{5\Delta} - \alpha = o$.

Si cette quantité, au lieu d'être $= o$, est positive ou

négative, c'eſt-à-dire, ſi la force perpendiculaire au rayon oſculateur, & par conſéquent tangente à la courbe, n'eſt pas nulle, alors il n'y aura point d'équilibre; & le fluide ne pourra ſubſiſter dans cet état, & cherchera néceſſairement à en prendre un autre, c'eſt-à-dire à s'applatir ou à s'allonger. Si la quantité dont il s'agit, eſt poſitive, c'eſt-à-dire, ſi la force tangentielle eſt dirigée des pôles vers l'équateur, le fluide tendra à s'applatir davantage, ou à s'allonger moins; ſi au contraire la quantité eſt négative, c'eſt-à-dire, ſi la force tangente à la courbe eſt dirigée de l'équateur vers les pôles, le fluide tendra à s'applatir moins ou à s'allonger davantage.

Or, pour que l'état d'équilibre ſoit tel, que ſi on dérange le fluide de cet état, il le reprenne de lui-même, il faut; 1°. que ſi le fluide eſt allongé & en équilibre, & qu'on le ſuppoſe moins allongé, la force qui dans le cas d'équilibre étoit zéro, ſoit négative dans le cas d'un moindre allongement; c'eſt-à-dire, que cette force ſoit dirigée de l'équateur vers les pôles. Car alors cette force (ſuivant ce qui vient d'être dit) tendra à remettre le fluide dans un état de plus grand allongement, & par conſéquent dans l'état qu'il avoit, lorſqu'il étoit en équilibre. 2°. Il faut au contraire que ſi le fluide eſt plus allongé que dans l'état d'équilibre, la force qui étoit $= o$ dans le cas d'équilibre, ſoit poſitive dans le nouvel état d'allongement, c'eſt-à-dire, dirigée des pôles vers l'équateur, & tendante à diminuer l'allongement du ſphéroïde, & à le remettre dans ſon état d'équilibre. 3°. Par

la

la même raiſon, ſi le fluide eſt applati, dans le cas d'équilibre, il faut que la force dont il s'agit, ſoit négative dans le cas d'un plus grand applatiſſement, & poſitive dans le cas d'un applatiſſement moindre.

Donc en général, α' étant la différence des axes dans le noyau intérieur, & cette quantité étant poſitive ou négative, mais invariable, ſi nous ſuppoſons que α ſoit la différence des axes du ſphéroïde extérieur, dans le cas d'équilibre, laquelle ſoit auſſi poſitive ou négative, ſelon que le ſphéroïde extérieur ſera applati ou allongé; imaginons que cette différence devienne $\alpha + \rho$; enſorte que le fluide, par quelque cauſe que ce ſoit, devienne plus ou moins applati, ou bien (ce qui eſt la même choſe) moins ou plus allongé, ſavoir plus applati ou moins allongé, ſi ρ eſt poſitif, & moins applati ou plus allongé, ſi ρ eſt négatif; on aura; 1°. puiſque le fluide eſt en équilibre dans le cas où la différence des axes eſt α, l'équation $\frac{9r}{2p} + \frac{3\delta\alpha + 3\alpha'(\Delta - \delta)}{5\Delta} - \alpha = 0$.

2°. Dans le cas où $\alpha + \rho$ ſera la différence des axes, on aura en ſubſtituant $\alpha + \rho$, au lieu de α dans l'expreſſion précédente, une quantité qui devra être négative, ſi ρ eſt poſitif, & poſitive, ſi ρ eſt négatif, de quelque ſigne que ſoit d'ailleurs α; c'eſt-à-dire que $\frac{3\delta\rho}{5\Delta} - \rho$ doit être négative ſi ρ eſt poſitif, & poſitive ſi ρ eſt négatif. Donc 3δ doit être $< 5\Delta$.

Donc, pour que le fluide reprenne de lui-même ſon

état d'équilibre, il n'eſt point néceſſaire que le noyau intérieur ſoit allongé dans le cas où le fluide ſupérieur le feroit lui-même, il ſuffit que la denſité du fluide ſoit plus petite que $\frac{5}{3}$ de celle du noyau.

II.

Une nouvelle conſidération va achever de mettre dans le plus grand jour ce que nous venons de dire. Nous avons démontré, p. 43 des *Recherches ſur la cauſe générale des Vents*, que ſi on fait $5\Delta = 3\delta - f$, on aura $\alpha = \frac{\frac{\varphi r}{2p} - \frac{\alpha'}{5}\left(2 + \frac{f}{\Delta}\right)}{\frac{-f}{5\Delta}}$. D'où l'on voit que ſi le fluide eſt en repos, & ne tourne pas, c'eſt-à-dire, ſi la force centrifuge φ eſt nulle, on aura $\alpha = \frac{\alpha'(2\Delta + f)}{f}$. Suppoſons à préſent que le fluide tourne; il eſt évident que cette rotation doit tendre à l'applatir davantage ou à l'allonger moins; donc $\frac{\varphi r \cdot 5\Delta}{-2pf}$ doit être une quantité poſitive, de quelque ſigne que ſoit d'ailleurs la quantité $\frac{\alpha'(2\Delta + f)}{f}$ qui exprime la différence des axes dans le cas de $\varphi = o$. Donc f doit être négative, c'eſt-à-dire, que 5Δ doit être plus grand que 3δ; préciſément comme on l'a vû ci-deſſus.

Si le noyau intérieur étoit allongé, enſorte que α' fût négatif, & ſi de plus f étoit poſitif, c'eſt-à-dire, que 5Δ

fût plus petit que $3\,\delta$, alors φ étant $= \varphi$, le sphéroïde extérieur seroit allongé, puisqu'alors $\frac{\alpha'(2\Delta+f)}{f}$ seroit négatif; mais si on suppose qu'en cet état d'équilibre, le sphéroïde vienne à tourner, il tendra à devenir moins allongé par la rotation; au lieu qu'il doit l'être davantage pour qu'il y ait équilibre, puisque f étant positif, la quantité $\frac{\varphi r \cdot 5\Delta}{-2pf}$ est négative.

Ainsi, dans le cas où la Terre seroit un sphéroïde allongé, l'hypothèse d'un noyau intérieur solide & allongé ne seroit pas plus avantageuse pour expliquer cet allongement, que celle d'un noyau intérieur solide & applati, si f étoit positive, c'est-à-dire, si $5\,\Delta$ étoit $< 3\,\delta$.

Ce n'est donc point la figure du noyau intérieur, comme le Mathématicien dont nous avons parlé semble l'avoir cru, qui empêche que l'équilibre troublé ne se rétablisse, ou qui contribue à le rétablir; c'est le rapport de la densité du fluide extérieur à la densité du noyau; si la densité δ du fluide est $< \frac{5}{3}$ de la densité Δ du noyau, l'équilibre dérangé se rétablira de lui-même; si elle est plus grande, l'équilibre une fois dérangé ne pourra se rétablir.

Cet équilibre se rétablira donc, quand même la densité δ du fluide supérieur seroit plus grande que celle du noyau, pourvû qu'elle fût $< \frac{5}{3}$ de cette densité du

noyau. Il eſt vrai que la plûpart de ceux qui ont traité de la figure de la Terre, ont ſuppoſé que δ devoit toujours être $< \Delta$, les couches les plus voiſines du centre, devant ſelon eux, être les plus denſes. Mais cela n'eſt nullement néceſſaire. Voyez mes *Recherches ſur le Syſtême du Monde, Troiſiéme Partie*, p. 187 & 188.

III.

Dans le même Ouvrage déja cité, *ſur la cauſe générale des Vents*, il s'eſt gliſſé une erreur de calcul qui n'influe en rien ſur le reſte de la Diſſertation ; mais qui étant corrigée, donne lieu à un réſultat curieux & important. Je ſuppoſe ici, pour ne point me répéter, qu'on ait l'Ouvrage devant les yeux ; il faudra réformer ainſi la fin de la page 155, & le commencement de la ſuivante. » Si » on fait tourner l'ellipſe $O\ M\ T$ (*fig.* 44.) ſur $O\ C$, » le plan $M\ C\ Z$ demeurant immobile ; $C\ T$ deviendra » $r - a\,\frac{-6A'^2 - 2CA'dA'}{rr}$, & z ne changera que » d'une quantité infiniment petite du ſecond ordre ; d'où » il s'enſuit que $C\ M$ dans ſa premiere poſition étant » $r + (a + \frac{CA'^2}{rr})\,\frac{zz - rr}{rr}$, elle ſera dans ſa » ſeconde poſition $r + (a + \frac{CA'^2}{rr} + \frac{2CA'dA'}{rr})$ » $(\frac{zz - rr}{rr})$; enfin l'angle entre la ligne $C\ M$ dans ſa » premiere poſition, & la ligne $C\ M$ dans ſa poſition nou-

» velle, sera à l'angle $\frac{r\,dA'}{\sqrt{rr-A'A'}} :: \sqrt{rr-zz} : r$; de-là » il s'ensuit que $k' = \frac{2\mathcal{C}A'dA'(rr-zz)}{r^4}$ divisé par $\frac{dA'\sqrt{rr-zz}}{\sqrt{rr-A'A'}} = \frac{2\mathcal{C}A'\sqrt{rr-A'A'}}{r^3} \times \frac{\sqrt{rr-zz}}{r}$.

Donc k' n'est pas égal à $\frac{6\mathcal{C}A'\sqrt{rr-A'A'}}{5rr} \times \frac{\sqrt{rr-zz}}{rr}$.

» Ainsi un sphéroïde qui n'est pas un solide de révolu- » tion, & qui est par-tout de la même densité, ne sau- » roit être en équilibre.

» Si le solide proposé n'est pas par-tout de la même » densité, mais qu'il renferme un noyau dont C soit le » centre, & dont les rayons r', $r' - a'$, $r' - a' - \mathcal{C}'$, » soient peu différens des rayons correspondans CO, CK, » CY; alors nommant p la force ou pesanteur en M » suivant MC, & Δ la densité du noyau intérieur, on » aura $p =$ à peu près $\frac{4n\Delta r}{3}$; & on trouvera que la » force perpendiculaire au rayon CM, dans le plan » $OMTC$, est $\left(\frac{4n\delta r}{3} \times \left[\frac{6a}{5r} + \frac{6\mathcal{C}A'^2}{5r^3}\right] + \left[\frac{4n\Delta r - 4n\delta r}{3}\right] \times \left[\frac{6a'}{5r} + \frac{6\mathcal{C}'A'^2}{5r^3}\right]\right) \times \frac{z\sqrt{rr-zz}}{rr}$; or le rapport de cette force à la force » p sera égal à k, si $\delta\left(\frac{a}{r} + \frac{\mathcal{C}A'^2}{r^3}\right) + (\Delta - \delta)\left(\frac{a'}{r} + \frac{\mathcal{C}'A'^2}{r^3}\right) = \frac{5\Delta}{3}\left(\frac{a}{r} + \frac{\mathcal{C}A'^2}{r^3}\right)$:

» & comme cette équation doit avoir lieu, quel que » ſoit A', il s'enſuit que cette équation donne ſéparément » les deux ſuivantes; 1°. $\frac{\delta a}{r} + (\Delta - \delta)\frac{a'}{r} = \frac{5\Delta a}{3r}$, » ou $a = \frac{(\Delta - \delta)a'}{\frac{5\Delta}{3} - \delta}$; 2°. $\frac{\delta C}{r^3} + (\Delta - \delta)\frac{C'}{r^3}$ » $= \frac{5\Delta C}{3r^3}$, ou $C = \frac{(\Delta - \delta)C'}{\frac{5\Delta}{3} - \delta}$. A l'égard de la force » perpendiculaire à CM dans le plan MCZ, elle ſera » $\frac{6A'\sqrt{rr - xx}\cdot\sqrt{rr - xx}}{5r^3} \times \left[\frac{4n\delta r}{3} \times C + \right.$ » $\left.\frac{(4n\Delta r - 4n\delta r)}{3} \times C'\right]$; & le rapport de cette » force à p ſera égal à k', ſi $\frac{\sqrt{rr - xx}}{5r} \times \left[\frac{\delta C + (\Delta - \delta)C'}{\Delta}\right]$ » eſt égal à $\frac{C\sqrt{rr - xx}}{3r}$; d'où l'on tire $C = \frac{(\Delta - \delta)C'}{\frac{5\Delta}{3} - \delta}$; » équation que la premiere condition a déja donnée.

» Ainſi, pour que le ſphéroïde ſoit en équilibre en » vertu de la ſeule attraction de ſes parties, ce ſphéroïde » n'étant pas d'ailleurs un ſolide de révolution, il faut; » 1°. que $\frac{a}{a'}$ ſoit $= \frac{C}{C'}$, c'eſt-à-dire que le noyau » & le ſphéroïde ſoient ſemblables; 2°. que $\frac{a}{a'} =$ » $\frac{3\Delta - 3\delta}{5\Delta - 3\delta}$. On voit auſſi que ſi a' & C' ſont égaux à » zéro, c'eſt-à-dire ſi le noyau intérieur eſt ſphérique, &

» que de plus $5\Delta = 3\delta$, α & ζ pourront être tout ce » qu'on voudra, pourvû qu'on les ſuppoſe très-petits. » Dans ce ſeul cas le ſphéroïde extérieur pourra être de » telle figure qu'on voudra, pourvû qu'il différe peu d'une » ſphère; & c'eſt le ſeul cas où il ne doit pas être ſem- » blable au noyau intérieur.

IV.

» Si le ſphéroïde tourne autour de l'axe OC, il en ré- » ſultera une force ſuivant $VM = \frac{\varphi . VM}{CK}$, φ étant la » force centrifuge en K; & comme on ſuppoſe φ très- » petite par rapport à p, cette force ſuivant VM ſera = » $\frac{\varphi\sqrt{rr-zz}}{r}$; & la force perpendiculaire au rayon » CM dans le plan $OMTC$ devra être diminuée de la » quantité $\frac{\varphi z\sqrt{rr-zz}}{rr}$. Quant à la force perpendi- » culaire à CM dans le plan MCZ, elle ne recevra » aucune altération; ainſi il n'y aura d'autres change- » mens à faire dans les calculs précédens, que de tranſ- » former l'équation $\frac{\delta\alpha}{p} + (\Delta - \delta)\frac{\alpha'}{r} = \frac{5\Delta\alpha}{3r}$, » en celle-ci $-\frac{5\varphi\Delta}{6p} + \frac{\delta\alpha}{r} + (\Delta - \delta)\frac{\alpha'}{r}$ » $= \frac{5\Delta\alpha}{3r}$, ou $\alpha = \frac{-\frac{\varphi r}{2p} + \frac{3\alpha r(\Delta-\delta)}{5\Delta}}{1-\frac{3\Delta}{5\Delta}}$; &

» l'égard de la valeur de $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}'}$, elle ſera la même que » dans l'Art. précédent, ſavoir $\frac{\Delta - \mathfrak{s}}{\frac{5\Delta}{3} - \mathfrak{s}}$; mais elle » ne ſera plus égale à $\frac{\alpha}{\alpha'}$.

Il eſt donc évident; 1°. que l'on peut avoir (même en ſuppoſant un mouvement de rotation) un ſphéroïde dont les coupes par l'axe ne ſoient, ni ſemblables, ni égales, & qui ſoit néanmoins en équilibre, pourvû qu'il y ait au centre un noyau, dont la denſité ſoit différente de celle de la ſurface; 2°. que dans ce ſphéroïde la quantité $\mathfrak{C}$ dépendra de la ſeule quantité $\mathfrak{C}'$, & la quantité α de la ſeule quantité α', ſans que α dépende de $\mathfrak{C}'$, ni $\mathfrak{C}$ de α'; 3°. que la valeur de α ſera la même que ſi $\mathfrak{C}'$ étoit $= o$, c'eſt-à-dire, ſi le noyau intérieur étoit ſphérique. Car cette valeur eſt la même que la valeur $\frac{\frac{\varphi r}{2p} + \frac{3\alpha'}{5}\left(\frac{\Delta - \mathfrak{s}}{\Delta}\right)}{1 - \frac{3\mathfrak{s}}{5\Delta}}$ qu'on a trouvé p. 42 de l'Ouvrage cité pour le cas d'un noyau ſphérique. La ſeule différence vient de ce que dans l'endroit cité, on regardoit α & α' comme poſitives, c'eſt-à-dire le ſphéroïde & le noyau comme applatis; au lieu qu'ici on regarde le ſphéroïde & le noyau comme allongés; & par conſéquent α & α' comme négatives.

Ainſi la diſſimilitude des méridiens n'empêcheroit point que

que la direction des graves ne pût être perpendiculaire à la surface de la Terre en un point quelconque. Nous avons fait voir de plus dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de 1754, que cette dissimilitude ne nuisoit point non plus aux phénomenes de la *Précession des Equinoxes*. Nous avons enfin prouvé dans la troisiéme Partie de nos *Recherches sur le système du Monde*, que les observations ne fournissent pas des argumens suffisans en faveur de la similitude parfaite des méridiens. Donc la dissimilitude des méridiens de la Terre n'est jusqu'ici prouvée, ni par la théorie, ni par les observations.

V.

Dans l'Art. *Gravitation* de l'Encyclopédie, & dans la troisiéme Partie de mes *Recherches sur le système du Monde*, p. 198 & 199, j'ai remarqué qu'un point placé sur une surface sphérique, éprouve de la part de cette surface, une attraction qui n'est que la moitié de celle qu'éprouveroit ce même point, placé au-delà de cette même surface à une si petite distance qu'on voudroit, pourvû que cette distance ne fût pas $= o$. J'ai essayé dans les mêmes endroits cités, & sur-tout dans l'Art. *Gravitation*, de rendre raison de ce paradoxe, en analysant & en décomposant, pour ainsi dire, le calcul par lequel on trouve la gravitation d'un point vers une surface sphérique. A cette analyse j'ajouterai ici quelques réflexions.

Soit A (*fig.* 45.) le point attiré, $BC = r$ le rayon de la ſurface attirante, $AB = n$, $BM = x$, π le rapport de la demi-circonférence au rayon; la différentielle de l'attraction ſera $\frac{2\pi r x(n+x)\,dx}{(nn+2nx+2rx)^{\frac{3}{2}}}$; cette différentielle eſt compoſée de deux parties, ſavoir $\frac{2\pi r n\,dx}{(nn+2nx+2rx)^{\frac{3}{2}}}$ & $\frac{2\pi r x\,dx}{(nn+2nx+2rx)^{\frac{3}{2}}}$. Or il eſt d'abord évident, que quand $n = 0$, la première différentielle s'évanouit, & que ſi n n'eſt pas $= \rho$, l'intégrale de cette première différentielle eſt $\frac{2\pi r n}{n+r}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{nn+2nx+2rx}}\right)$, laquelle (en ſuppoſant x infiniment plus petite que r) ſe réduit à $\frac{2\pi r n}{r}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{nn+2nx+2rx}}\right)$ $= 2\pi AB \times \left(\frac{1}{AB} - \frac{1}{AN}\right)$: & ſi le point N tombe en D, l'intégrale deviendra $2\pi AB \times \left(\frac{1}{AB} - \frac{1}{AD}\right)$, qui ſe réduit à 2π, parce que $\frac{1}{AD}$ peut être négligé par rapport à $\frac{1}{AB}$. On voit donc comment une différentielle qui eſt $= 0$ auſſi-bien que ſon intégrale, lorſque $x = 0$, peut devenir finie, en ſuppoſant x ſi petite qu'on voudra, pourvû qu'elle ne ſoit pas $= 0$. J'avois déja fait cette remarque dans l'art. *Gravitation* de l'Encyclopédie; & M. de la Grange l'a faite auſſi depuis dans le premier Volume des *Mémoires de l'Académie des Scien-*

ées de Turin. M. de la Grange remarque de plus, avec raison, que si AB eſt négatif, l'intégrale qui étoit 2π dans le cas de AB poſitif, devient alors $= -2\pi$. Ainſi voilà une quantité Algébrique qui, dans le cas de n poſitive, & ſi petite qu'on voudra, eſt $= 2\pi$, qui dans le cas de $n = o$ eſt $= o$, & qui dans le cas de n négative & ſi petite qu'on voudra, devient $= -2\pi$.

Pour adoucir (ſi je puis parler ainſi) cette eſpèce de paradoxe, d'une quantité qui s'évanouit tout-à-coup ſans avoir paſſé auparavant par des diminutions ſucceſſives, j'avois apporté dans *mes Recherches ſur le ſyſtême du Monde*, p. 199, III. Partie, l'exemple de la courbe $y = \sqrt{ax} + \sqrt[3]{a^3(x+b)}$, qui, comme M. Euler l'a remarqué, perd ſubitement un diametre lorſque $b = o$. M. de la Grange m'objecte que cet exemple n'eſt pas analogue au précédent, parce que dans le cas de $b = o$, la courbe eſt compoſée d'un ſyſtême de deux courbes différentes, lequel ſyſtême conſerve un diametre. J'en conviens, & je ne l'ignorois pas; auſſi n'ai-je apporté cet exemple que pour montrer que ce qu'on appelle *la Loi de continuité* (dans quelque ſens qu'on prenne ce mot) ne s'obſerve pas toujours dans les quantités Algébriques. Car il eſt d'ailleurs facile d'apporter un exemple plus direct, & plus analogue à celui dont il s'agit. Soit AC (*fig.* 46.) un quarré dont le côté $AB = b$; & ſoit $AE = n$, & $AF = \frac{bb}{n}$; il eſt clair que tant que AE ne ſera pas $= o$ abſolu, la ſurface $AEGF$ ſera $= bb$;

mais quand $AE = o$, il n'y aura plus de surface, & $AEGF$ sera $= o$; la surface se réduisant alors à une ligne droite.

Cette derniere maniere d'expliquer le paradoxe en question, me paroît, si je l'ose dire, plus lumineuse & plus simple que celle de M. de la Grange, qui mérite que je m'y arrête un moment. La différence finie entre les attractions, lorsque $n = o$, & lorsque n est finie & si petite qu'on voudra, dépend » selon lui, du point de » la surface B (*fig.* 45.) qui exerce une force finie, & » $= 2\pi$ sur le point A, lorsque l'on fait évanouir leur » distance AB. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à réfléchir qu'un point de surface est nécessairement un infiniment petit du second ordre, & que la fonction AB^n » de la distance évanouissante devient aussi infiniment » petite du même ordre; d'où il s'enfuit que l'attraction » du point A (qui est proportionnelle à ce point divisé » par la fraction donnée) deviendra finie, & on peut s'assurer d'ailleurs que cette attraction sera $= 2\pi$. Ceci » posé, quand on fait venir le point A à la surface de » dehors, on a l'attraction $= 4\pi$, qui est composée de » l'attraction 2π du point A, & de l'autre partie 2π qui » doit nécessairement exprimer l'attraction du reste de la » surface. Mais si l'on fait que le point A vienne toucher » la surface au-dedans, alors l'attraction 2π du point A » devra agir en sens contraire, & jointe avec l'autre » partie 2π qui agit dans le même sens qu'auparavant, » donnera $2\pi - 2\pi = o$ pour l'attraction dans ce cas;

» enfin ſi le point eſt d'abord placé ſur la ſurface en *B*, » on exclut dans ce cas l'attraction du point de ſurface » *B*, & on a ſeulement 2π pour l'attraction totale, » comme le donne le calcul ».

1°. Je n'entends pas la diſtinction que veut mettre M. de la Grange, entre un point qui *touche une ſurface en dehors*, un point qui eſt *placé ſur cette ſurface*, & un point *qui la touche en-dedans*. Car, comme une ſurface n'a point de largeur, un point qui coïncide avec une ſurface, ne la touche proprement ni *en-dedans*, ni *en-dehors*, ou, ſi l'on veut, la touche en-dedans & en-dehors tout-à-la-fois; & un point qui ne coïncide pas avec la ſurface, ne la touche point. Cette notion de la ſurface eſt adoptée de tous ceux qui connoiſſent les Elémens de Géométrie, & je ne vois point ce qu'on peut y oppoſer.

2°. Si par les mots de *toucher en-dedans* ou *en-dehors*, M. de la Grange veut dire, être placé à une diſtance infiniment petite en-dedans ou en-dehors, alors l'expreſſion s'entend; mais je ne conviens pas de ce que prétend l'Auteur, que le point de ſurface *B*, qui eſt *néceſſairement un infiniment petit du ſecond ordre*, exerce ſur le point *A* une attraction finie & $= 2\pi$. Car 1°. pourquoi faut-il *néceſſairement* regarder le point *B* de la ſurface comme un infiniment petit du ſecond ordre? Ce point *B* n'eſt qu'un point ſans étendue, incomparable en lui-même à quelque ſurface que ce ſoit. 2°. Si au lieu du point *B* on ſubſtitue en effet une ſurface circulaire, réellement infiniment petite du ſecond ordre, dont l'abſ-

ciſſe ſoit BE, & le rayon BO, on trouvera facilement (voyez l'Article *GRAVITATION* de l'Encyclopédie), que l'attraction de cette ſurface eſt $\frac{2\pi r(nn+\pi r)}{(2n+2r)^2} \times \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{\sqrt{nn+2nx+2rx}}\right) + 2\pi r \times \left(\frac{2\sqrt{nn+2nx+2rx}-2n}{(2n+2r)^2}\right)$, qui ſe réduit (à cauſe de n infiniment petite) à $2\pi n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{nn+2nx+2rx}}\right) + \frac{\pi}{r} \times (\sqrt{nn+2nx+2rx}-n)$, ou $2\pi - \frac{2\pi.AB}{AO} + \frac{\pi(AO-AB)}{r} = 2\pi - \frac{2\pi.AB}{AO}$, parce que $\frac{\pi.(AO-AB)}{r}$ eſt infiniment petit. Or cette quantité $2\pi - \frac{2\pi.AB}{AO}$ n'eſt $= 2\pi$ que dans le cas où AO eſt infiniment grande par rapport à AB, parce que le terme $\frac{2\pi.AB}{AO}$ s'évanouit alors; & il faut pour cela que BO ſoit infiniment grande par rapport à AB. Donc quand même on regarderoit le point de ſurface B comme une ſurface infiniment petite du ſecond ordre, on n'en ſeroit pas en droit de conclure que l'attraction de ce point ſur le point A eſt $= 2\pi$.

M. de la Grange ſe ſeroit exprimé, ce me ſemble, plus exactement, s'il avoit dit, que tirant du point A la tangente AF, l'attraction de la portion de ſurface formée par l'arc BF eſt $2\pi - \frac{2\pi.AB}{AF} + \frac{\pi(AF-AB)}{r}$,

qui se réduit (dans le cas où AB est infiniment petite du second ordre) à 2π, parce qu'alors non-seulement AB & AF sont nulles par rapport à r, mais encore AB est nulle par rapport à AF. Ainsi tant que AB n'est pas $= o$ absolu, l'attraction de la surface formée par BF, est finie & $= 2\pi$; mais lorsque $AB = o$, cette surface & son attraction sur le point A s'évanouissent.

On peut encore considérer que la même surface BF qui exerce sur le point A une attraction finie, lorsque AB est infiniment petite du second ordre, n'exerce plus sur ce même point qu'une attraction infiniment petite, lorsque $AB = o$, BF restant toujours la même & infiniment petite. Le calcul en est facile à faire; & on trouvera que l'attraction est $\frac{\pi . BF}{r}$. Ce résultat n'a rien de surprenant; car en regardant BF comme une ligne droite, & la surface qui en est formée, comme plane, l'attraction que souffre le centre B, seroit absolument nulle; mais la petite courbure de la surface fait que cette attraction est $\frac{\pi . BF}{r}$.

On peut remarquer en passant, que si on regarde BF comme infiniment petite du premier ordre, & par conséquent la surface engendrée par BF comme infiniment petite du second ordre, AB^2 sera infiniment petite du quatriéme; de sorte que, suivant le raisonnement de M. de la Grange, l'attraction de cette surface sur le point A seroit infiniment grande du second ordre, quoiqu'elle

ne ſoit réellement égale qu'à 2π. Mais en voilà, ce me ſemble, aſſez pour faire voir que l'explication du paradoxe donnée par cet habile Géometre, eſt inſuffiſante, ce qu'on ne peut pas, ce me ſemble, dire de la nôtre. Dans l'Article *Gravitation* de l'Encyclopédie, j'en ai donné l'explication analytique, en montrant comment une partie de la différentielle & par conſéquent de l'intégrale, s'évanouit dans le cas de $n = o$. Ici j'en donne la vraie raiſon Métaphyſique, en montrant que l'attraction de la ſurface formée par BF, eſt toujours $= 2\pi$, excepté dans le cas où AB & BF ſont $= o$. Si le point A eſt au-dedans de la ſurface, par exemple en M, & que BM ſoit infiniment petite du ſecond ordre, on prouvera de même, que l'attraction de la ſurface formée par BN, eſt $= 2\pi$.

Fin du huitiéme Mémoire.

NEUVIÉME

NEUVIÉME MÉMOIRE.

Doutes ſur différentes queſtions d'Optique.

JE me propoſe d'examiner dans ce Mémoire différens points fondamentaux de la théorie de la viſion, & de montrer combien il reſte encore d'incertitude ſur ces différens points. On y verra que nous n'avons encore rien de bien aſſuré, ni ſur le lieu apparent des objets, ni ſur leur grandeur apparente, ſoit dans la viſion directe, ſoit dans la viſion réfléchie ou réfractée.

I.

Tous les Opticiens ont pris juſqu'à préſent pour un axiome, que tout objet, ou plutôt tout point viſible, eſt apperçu dans le rayon qui va de ce point viſible à l'œil. Cette Propoſition ne paroît devoir ſouffrir aucune difficulté, lorſque le rayon viſuel eſt dans l'axe optique même; parce qu'alors le rayon viſuel traverſe l'œil en ligne droite, ſans ſouffrir aucune réfraction. Mais il n'en eſt pas ainſi des rayons qui entrent dans l'œil obliquement, & qui viennent des côtés de l'objet. Car ces

rayons ſouffrent néceſſairement des réfractions dans les humeurs de l'œil; de ſorte que la partie du rayon qui frappe le fond de l'œil, & qui eſt la cauſe immédiate de la viſion, n'eſt pas en ligne droite avec la partie du rayon qui eſt venue du point viſible à l'œil. Ce n'eſt pas tout; le rayon qui frappe le fond de l'œil, n'affecte pas l'organe ſuivant ſa propre direction: mais ſon action ſur le fond de l'œil, doit s'exercer & s'eſtimer (conformément aux loix de la Méchanique) ſuivant une direction perpendiculaire à la courbure que le fond de l'œil forme en cet endroit. Or je demande maintenant, ſuivant quelle direction on apperçoit le point viſible? Eſt-ce ſuivant la direction du rayon qui va du point viſible à l'œil? L'expérience paroît le prouver, ou du moins telle eſt l'opinion générale des Opticiens. Mais 1°. il eſt difficile de faire cette expérience d'une maniere bien ſûre & qui ne laiſſe aucun doute; car tout point viſible placé hors de l'axe Optique, nous laiſſe toujours quelque incertitude ſur la véritable place où il eſt; & la preuve qu'on en peut donner, c'eſt la difficulté d'enfiler un anneau, par exemple, qui n'eſt pas vû dans la direction de l'axe Optique (*a*). D'ailleurs par quel moyen s'aſſurer de la di-

(*a*) Non-ſeulement il eſt néceſſaire que l'objet ſoit dans la direction de l'axe Optique, pour être jugé à la véritable place où il eſt; mais il faut encore qu'il ſoit vû des deux yeux à la fois, & qu'il ſe trouve par conſéquent au concours des deux axes. Car qu'on ferme un œil, & qu'on tâche enſuite d'enfiler l'anneau, on éprouvera plus de difficulté que quand on a les deux yeux ouverts. C'eſt un fait dont les Ecrivains d'Optique conviennent.

rection préciſe du rayon viſuel, à quelques minutes ou même à un degré près ? J'avoue que cette détermination me paroît très-difficile, & que l'eſtimation de la direction de ce rayon ſera toujours un peu vague & incertaine. 2°. En accordant même que l'on apperçoive le point viſible ſuivant la direction du rayon viſuel qui entre dans l'œil, le fait paroît inexplicable. Car enfin ce n'eſt point cette partie de rayon qui produit la viſion ; c'eſt la partie qui vient tomber au fond de l'œil après avoir été rompue, & qui ne ſe trouve point en ligne droite avec la partie du rayon viſuel qui entre dans l'œil. Comment & par quel principe l'ame démêle-t-elle que l'objet n'eſt pas dans la direction du rayon qui produit immédiatement la ſenſation, mais dans une autre direction ſuivant laquelle elle n'eſt point réellement affectée ?

Dira-t-on, ce qui paroît le parti le plus naturel, que l'objet eſt vû dans la direction de la perpendiculaire menée du point où le rayon rompu vient tomber ſur le fond de l'œil ? Mais 1°. cette perpendiculaire pouvant s'écarter très-ſenſiblement de la direction qu'avoit le rayon incident, lorſqu'il eſt entré dans l'œil, ne s'enſuivroit-il pas que les points viſibles placés hors de l'axe Optique, ſeroient apperçus ailleurs qu'ils ne ſont réellement ; & qu'ainſi les objets les plus proches de l'œil, & dont il eſt le plus à portée de juger, paroîtroient d'une grandeur différente de celle dont ils ſont en effet ? 2°. Comme chaque point viſible eſt vû des deux yeux, puiſ-

qu'il envoye des rayons à chaque œil, la perpendiculaire dont il s'agit, ſeroit différente pour chaque œil, & pour l'ordinaire même placée dans des plans différens; ainſi le point viſible, placé hors de l'axe Optique, devroit alors paroître double. Or c'eſt ce qui n'arrive pas.

Les mêmes difficultés auront lieu, ſi on ſuppoſe que l'objet ſoit vû dans la direction même de la partie du rayon qui vient frapper le fond de l'œil; & il y faudra ajouter de plus la difficulté de concevoir comment on voit l'objet dans la direction de ce rayon, & non dans celle de la perpendiculaire, ſuivant laquelle l'organe eſt réellement affecté.

II.

Pour développer davantage, & ſoumettre au calcul les difficultés qu'on vient d'expoſer, ſoit *Q R S* (*fig.* 47.) la cornée, dont je ſuppoſe que le centre ſoit en *B*; *A B* l'axe Optique paſſant par le centre de la cornée & des autres humeurs de l'œil; *L B* un rayon qui vienne d'un point placé lors de l'axe Optique; l'angle *A B L* étant d'ailleurs ſuppoſé très-petit, comme il le doit être: car le rayon *L S* ou *L B* doit toujours tomber ſur un point *S* de la cornée qui ſoit très-près du ſommet *R*; puiſque ce rayon *L B*, pour opérer la viſion, doit paſſer par la prunelle dont le diametre eſt très-petit, & beaucoup plus petit que celui de la cornée.

Le rayon *L B* qui ne ſouffre aucune réfraction en *S*, parce qu'il eſt perpendiculaire à la cornée, tombe en *u*

ſur la premiere ſurface *P M u* du cryſtallin, dont je ſuppoſe que le centre ſoit en *E*; là il ſouffre une réfraction qui l'approche de la perpendiculaire *u E*, & qui change ſa direction en *u O*. Ce rayon *u O* tombe en *V* ſur la ſeconde ſurface *P N V* du cryſtallin, dont je ſuppoſe que le centre ſoit au point *C*; le rayon *u O* ſe rompt au point *V* en s'éloignant de la perpendiculaire *C V*, & devient le rayon *V i* qui tombe ſur le fond de l'œil en *X*, & qui, ſuivant les loix de la viſion, doit former en ce point *X* l'image ou foyer du point viſible, qui a envoyé le rayon *L S* ou *L B*. Si donc *K* eſt le centre du cercle *X Z D* que forme le fond de l'œil, il ſemble que l'objet doive être apperçu dans la direction du rayon *X K Y*, ſuivant laquelle s'exerce l'action du rayon *i X*; direction qui n'eſt pas la même que celle du rayon incident *L S*. Ainſi le point viſible qui a envoyé le rayon *L S*, ne ſeroit point vû dans la place où il eſt réellement: & d'ailleurs il devroit arriver preſque toujours qu'il ſeroit vû double; parce que la ligne *X Y* ne ſera pas pour l'ordinaire dans le même plan pour chaque œil.

Afin d'appliquer ici les nombres, & d'arriver à un réſultat qui nous donne une idée plus préciſe de la difficulté, ſuppoſons avec M. Petit le Médecin (*a*), que *R B* = 3 lig. $\frac{1}{4}$; que *R M* = 1 lig. $\frac{1}{4}$ (*b*); donc *B M* =

(*a*) Mém. de l'Acad. 1718, pag. 296.
(*b*) *Ibid.* p. 298.

2 lig. $\frac{1}{2}$; ſuppoſons encore avec le même M. Petit (*a*); $ME = 4$ lignes; $MN = 2$ lignes (*b*); donc $BN = \frac{1}{2}$ ligne, & $BE = 1$ ligne & demi; ſuppoſons de plus, toujours avec M. Petit, CN ou $CV = 2$ lig. $\frac{1}{2}$ (*c*); ſuppoſons enfin avec M. Jurin (*d*), que la réfraction de l'humeur aqueuſe dans le cryſtallin ſoit comme 13 à 12; & du cryſtallin dans l'humeur vitrée comme 12 à 13; on aura d'abord $BO = \frac{1}{11} BE$; angl. BOu ou $BOV = ABL - \frac{BuE}{13} = ABL \times \left(1 - \frac{BE}{13\,ME}\right)$; $OVG = BOV \times \frac{CO}{CV}$; $iVo = \frac{1}{12} OVG$; & par conſéquent MiV, ou $BOV + iVO = ABL \times \left(1 - \frac{BE}{13\,ME}\right) + ABL \times \left(1 - \frac{BE}{13\,ME}\right) \times \frac{CO}{12\,CV}$; enfin l'angle $MKY = MiV \times \frac{iZ}{KZ} = MiV \times \left(1 + \frac{i \cdot K}{KZ}\right)$.

Or ſuivant les valeurs numériques ſuppoſées ci-deſſus, on a $BE = \frac{1}{2}$, $ME = 4$; donc $\frac{BE}{13\,ME} = \frac{3}{8 \cdot 13}$: on a de plus $BO = \frac{1}{11} BE = \frac{3}{2 \cdot 13}$; $BN = \frac{1}{2}$; $CN = 2\frac{1}{2}$; donc $CO = CN + NB + BO = 3 + \frac{3}{26}$; enfin

(*a*) Mém. 1728, p. 300; & Mém. 1730, p. 5 & 7.

(*b*) Mém. 1730, p. 7.

(*c*) *Ibid.* p. 7.

(*d*) *Eſſai upon diſtinct and indiſtinct viſion*, Art. 111. Cet Eſſai eſt imprimé à la fin de l'Optique de M. *Smith*.

$CV = \frac{1}{2}$; & $12\,CV = 30$; donc $Mi\,V = ABL \times \left(1 - \frac{3}{8.13}\right) \times \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{260}\right) = ABL \times \left(1 + \frac{1947}{27040}\right) =$ environ $ABL\left(1 + \frac{1}{13}\right)$.

Or à cauſe de la petiteſſe de la ligne uV, & du petit angle qu'elle fait avec AB, les angles $Mi\,u$, $Mi\,V$ peuvent être pris ſenſiblement l'un pour l'autre; donc ſi on fait l'angle $Lu\lambda = \frac{1}{13} ABL$, la ligne $u\lambda$ pourra être cenſée dans la direction du rayon Xi. Donc ſi on voyoit dans la direction de ce rayon Xi ou $u\lambda$ le point viſible qui a envoyé le rayon Lu, la grandeur apparente de l'objet ſeroit de $\frac{1}{13}$ environ plus grande qu'elle n'eſt en effet (*a*).

III.

Si on ſuppoſe, ce qui paroît le plus naturel, que la viſion ſe faſſe ſuivant la ligne XK, l'angle MKY ſera à très-peu-près $= ABL\left(1 + \frac{1}{13}\right)\left(1 + \frac{iK}{KZ}\right)$; ainſi l'angle ABL & la grandeur apparente de l'objet, ſeront aug-

(*a*) Cette grandeur apparente diminueroit un peu, ſi on ſuppoſoit le rayon ME de la premiere convexité du cryſtallin $= 6$ lignes, & non pas 4, comme M. Petit dit l'avoir obſervé dans pluſieurs ſujets; car alors on auroit $BE = \frac{7}{2}$; & $Mi\,V = ABL\left(1 - \frac{7}{12.13}\right) \times \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{7}{780}\right) = ABL + \frac{149 \times 865}{156 \times 780} = ABL\left(1 + \frac{7205}{121680}\right) =$ environ $ABL\left(1 + \frac{1}{17}\right)$; ce qui donne encore une augmentation ſenſible. D'ailleurs les dimenſions ſur leſquelles a été fait le calcul qui donne $MiV = ABL\left(1 + \frac{1}{13}\right)$, ſont les dimenſions les plus ordinaires.

mentées de la quantité $\frac{2}{13} + \frac{14 \cdot iK}{13 \cdot KZ}$. Il ne s'agit plus que de trouver les valeurs de iK & de KZ.

Selon M. Jurin (*a*), RZ (*fig.* 48.) = 9 lig. $\frac{2}{5}$; selon M. Petit (*b*), RD = 1 lig. $\frac{2}{5}$; donc DZ = 8 lig. Selon le même M. Petit (*c*), DQ = 2 lig. $\frac{1}{2}$; donc Da ou $\frac{DQ^2}{DZ} = \frac{25}{8.4}$; donc $aZ = 8 + \frac{25}{32}$; & $KZ = 4 + \frac{25}{64}$; or $BZ = RZ - RB = 9\frac{2}{5} - 3\frac{3}{4} = 6 + \frac{8-15}{20} = 6 - \frac{7}{20} = 5 + \frac{13}{20}$; & BO, comme on l'a vû ci-dessus $= \frac{3}{26}$. Donc $OZ = BZ - BO = 5 + \frac{13}{20} - \frac{3}{26}$. Et par conséquent OK, ou $OZ - KZ = 1 + \frac{13}{20} - \frac{25}{64} - \frac{3}{26}$. Enfin Oi (*fig.* 47.) = à-peu-près $\frac{NO \times CO}{12\,CV_1} = (\frac{1}{2} + \frac{3}{26}) \times (\frac{1}{10} + \frac{1}{260}) =$ à-très-peu-près $\frac{1}{20} + \frac{3}{200} + \frac{1}{2.260} = \frac{1}{20} + \frac{7}{520} = \frac{33}{520}$. Donc iK, ou $Oi + OK = \frac{520 + 338 + 33 - 60}{520} - \frac{25}{64} = \frac{520 + 311}{520} - \frac{25}{64} =$ à-très-peu-près $1 + \frac{3}{5} - \frac{25}{64} = 1 + \frac{67}{320}$. Donc l'angle ABL est surpassé par l'angle MKY, de la fraction $\frac{1}{13} + \frac{14}{13} \times (1 + \frac{67}{320}) : (4 + \frac{25}{64}) = \frac{1}{13} + \frac{14 \cdot 387}{13 \cdot 281 \cdot 5} = \frac{6823}{18265} =$ environ $\frac{1}{3}$, & même un peu plus. C'est pourquoi l'image de l'objet paroîtroit augmentée à-peu-près

(*a*) *Essai upon distinct and indistinct vision*, Art. 136.
(*b*) Mém. de l'Acad. 1728, p. 298.
(*c*) *Ibid.*

d'un

tiers, ſi le point viſible d'où eſt parti le rayon LB, étoit vû dans la direction du rayon XK; or cela eſt contraire à l'expérience. Donc on ne ſauroit ſuppoſer que la viſion ſe faſſe ſuivant des lignes qui paſſent par le centre K du globe de l'œil, quelque naturelle que cette ſuppoſition paroiſſe.

IV.

Suivant quelle ligne donc apperçoit-on les objets ou points viſibles qui ne ſont pas placés dans l'axe Optique? C'eſt ce qui paroît très-difficile à déterminer éxactement & en toute rigueur. Cependant, comme l'expérience prouve que les objets de peu d'étendue, qui ſont à la portée de nos yeux, ne paroiſſent pas ſenſiblement plus grands qu'ils ne le ſont en effet; il s'enſuit que le point viſible qui envoye le rayon LS ſur la cornée, eſt vû ſenſiblement à ſa place; & que par conſéquent ce point viſible L, dont l'image eſt en X, eſt vû ſenſiblement dans la direction du rayon XL. Pourquoi cela? C'eſt un fait que je n'entreprendrai pas d'expliquer. Mais voici quelque choſe de plus.

Juſqu'ici on a fait voir que les objets, qui ne ſont pas dans l'axe Optique, ont un lieu aſſez mal décidé, & qu'il eſt douteux que ce lieu ſoit préciſément dans le rayon viſuel qui part de l'objet pour arriver à l'œil. Je dis préſentement que les objets même qui ſont placés dans l'axe Optique, ne ſont pas toujours vûs dans cet axe. En effet ſuppoſons qu'on dirige les deux axes Op-

tiques AE, BE (*fig.* 49.) vers une Etoile E; il eſt certain que cette Etoile nous paroît beaucoup plus près qu'elle n'eſt en effet: il eſt vrai qu'on n'eſtime ſa diſtance que d'une maniere très-imparfaite & très-vague; mais il n'en eſt pas moins ſûr que cette diſtance apperçûe, ou apparente, ou préſumée, eſt fort au-deſſous de la diſtance réelle. Si donc on voyoit l'Etoile dans chacun des axes Optiques AE, BE, on la verroit dans chacun de ces axes aux points e, qui ſont incomparablement plus près de A & de B, que de E; ainſi on verroit deux Etoiles e, e, & la diſtance apparente ee de l'une à l'autre ſeroit à-peu-près égale à AB. Cependant l'expérience prouve qu'on n'apperçoit qu'une ſeule Etoile; ainſi cette Etoile eſt vûe à-peu-près au point de milieu c de la ligne ee, ſuivant des lignes Ac, Bc, différentes des axes Optiques. Il eſt vrai que ces lignes, quoique réellement différentes des axes Optiques, ne s'en écartent que fort peu; mais enfin elles en different; & cette expérience ſuffit pour prouver que les objets qui ſont à une diſtance conſidérable de l'œil, ne ſont point vûs exactement dans l'axe Optique, même quand on les regarde directement.

Donc en général, rien n'eſt moins certain que ce principe vulgaire d'Optique, que *les objets ſont vûs dans la direction du rayon qu'ils envoyent à l'œil.*

V.

C'eſt une grande queſtion entre les Opticiens, que de

ſavoir en quel endroit on rapporte l'image dans un miroir ou dans un verre. Les anciens Auteurs ont tous pris pour principe, qu'un objet vû par réfraction ou par réflexion, eſt apperçu dans l'endroit où le rayon réfléchi ou rompu, coupe la perpendiculaire menée de l'objet ſur la ſurface réfléchiſſante ou rompante. Ce principe eſt vrai dans les miroirs plans; & c'eſt-là ſans doute ce qui a déterminé les anciens Opticiens à l'étendre aux autres ſurfaces. Ils auroient dû voir cependant qu'il n'y avoit entre les deux cas aucune analogie. Il y en auroit eû un peu davantage, s'ils avoient placé l'image dans l'endroit où le rayon réfléchi ou rompu rencontre la perpendiculaire menée de l'objet, non à la ſurface réfléchiſſante ou réfringente, mais à la ligne droite qui touche cette ſurface au point de réfraction ou de réflexion. Car enfin ce point eſt celui par lequel le rayon viſuel eſt envoyé à l'œil; & ce rayon y eſt envoyé de la même maniere, que ſi le rayon incident tomboit ſur une ſurface plane, qui touchât au point de réflexion ou de réfraction, la ſurface réfléchiſſante ou rompante. Il ſeroit donc plus naturel de rapporter le lieu de l'image à la perpendiculaire menée ſur cette tangente, qu'à la perpendiculaire menée ſur la ſurface, laquelle eſt abſolument indépendante de la poſition du rayon réfléchi ou rompu, & du point réfléchiſſant ou rompant. Cependant aucun des Opticiens anciens ne paroît avoir fait cette réflexion; & tous ſe ſont accordés à placer le lieu de l'image dans le concours du rayon réfléchi ou rompu avec la cathete d'incidence.

VI.

Quelques-uns seulement, comme le P. Taquet, en adoptant ce principe, sont convenus que l'expérience y étoit contraire en certains cas. Soit, par exemple, dit le P. Taquet, un objet placé au-delà du centre d'un miroir concave ; il est visible que les cathétes d'incidence menées des deux extrémités de l'objet, se croisent au centre ; & que par conséquent, si le lieu de l'image est dans ces cathétes, & que l'œil soit placé entre le centre & le miroir, l'image doit lui paroître renversée. Cependant elle paroît droite. Il est donc constant que le principe des anciens Opticiens n'est pas général, & par conséquent n'est pas vrai.

VII.

Barrow, Gregori & Newton ont suivi un principe en apparence bien plus plausible. Un point visible, disent-ils, n'envoye pas à l'œil un seul & unique rayon ; mais il envoye sur la surface réfléchissante ou rompante, des rayons dont un certain nombre entre dans l'œil, à cause que la prunelle n'est pas un point Mathématique, mais qu'elle a une certaine largeur. Ainsi les rayons OF, Of (*fig.* 50.) qui partent d'un objet, & qui sont réfléchis ou rompus avant d'arriver à l'œil & d'entrer dans la prunelle LN, y arrivent comme s'ils venoient directement du point E, où les rayons réfléchis ou rompus FL, fN concourroient étant prolongés, s'il est nécessaire. Or,

comme les rayons FL, fN ſont fort près l'un de l'autre, à cauſe du peu de largeur de la prunelle, leur point de concours E eſt ſenſiblement le même que ſi les rayons FL, fN étoient infiniment proches; c'eſt-à-dire, que c'eſt le point où le rayon FL touche la cauſtique par réfléxion ou par réfraction; ce point eſt donc celui où l'objet eſt vû ſuivant ces Auteurs.

VIII.

Cette opinion paroît plauſible; cependant Barrow lui-même, à la fin de ſes *Leçons Optiques*, avertit que l'expérience y eſt ſouvent contraire. Voici le cas. C'eſt celui où les rayons FL, fN, au lieu d'entrer dans l'œil divergens, y entrent convergens; ce qui peut arriver aiſément, toutes les fois que la réfléxion ou la réfraction rapproche les rayons au lieu de les écarter. Car alors ſi on place l'œil entre le point F & le concours E des rayons, les rayons entreront convergens dans l'œil, & l'objet ne peut être vû en E (où l'on devroit le voir ſuivant ces Auteurs) puiſque ce point E eſt derriere la tête. Barrow en apporte pluſieurs exemples, entr'autres celui du P. Taquet, où l'œil eſt ſuppoſé proche d'un mirois concave, & l'objet ou point viſible dans l'axe au-delà du centre.

Il avoue en même-tems que cette difficulté lui paroît inſoluble. S'il m'eſt permis de le dire, il me ſemble qu'elle affoiblit peu le principe. Car quand les rayons entrent dans l'œil convergens, la viſion doit être confu-

ſe; & le principe ne peut s'étendre qu'aux rayons qui entrent dans l'œil divergens; 1°. parce que ces rayons ſont les ſeuls qui puiſſent produire une viſion diſtincte, & par conſéquent une vûe nette de l'image; 2°. parce que les rayons convergens ſe réuniſſent derriere l'œil, où certainement on ne peut rapporter l'image, dont on n'a d'ailleurs qu'une viſion confuſe.

IX.

C'eſt pourquoi le principe de Barrow pourroit ſubſiſter, ce me ſemble, s'il n'y avoit point d'autres raiſons à y oppoſer que l'expérience rapportée ci-deſſus; il faudroit ſeulement y ajouter cette reſtriction, qu'il ne s'agit que de l'image vûe par des rayons divergens. Mais ce principe paroît ſujet à d'autres difficultés.

En premier lieu, la poſition des yeux peut être telle, que les rayons réfléchis ou rompus qui entrent dans chaque œil, & qui partent d'un même point, ſoient très-ſenſiblement différens, & forment entr'eux un grand angle. Suppoſant donc que ces rayons concourent entr'eux; il faudroit que ce concours fût le même que le point *E* de la cauſtique pour chaque rayon. Or c'eſt ce qui arrivera très-rarement. Dans tout autre cas, il y aura deux points *E* ou deux lieux de l'image très-ſenſiblement différens pour chaque œil, & par conſéquent l'image paroîtroit double. Ce qui eſt contraire à l'expérience. Donc l'image n'eſt pas vûe au point *E*.

X.

De plus, ſi les deux yeux ſont placés de maniere que les rayons qui entrent dans chaque œil, ne concourent point, parce qu'ils ſe trouveront, ou parallèles, ou dans des plans différens, il eſt viſible que dans ce cas l'image ne paroîtra même dans aucun des deux rayons; autrement il faudroit, ou qu'elle fût vûe double, ou qu'on ne vît l'image que d'un ſeul œil; ce qui n'eſt pas.

Cette réflexion ſuffit pour répondre, en paſſant, à M. Wolf, qui prétend que l'objet eſt vû dans le point de concours des rayons qui entrent dans chaque œil. Car où verra-t-on l'objet quand ce point de concours n'exiſtera pas? Ce qui eſt fort ordinaire.

XI.

Une autre conſidération rend le principe de Barrow encore plus douteux. Il eſt certain qu'en n'ayant égard qu'à la longueur LN de la prunelle, le concours des rayons qui y entrent, eſt en E. Mais ſi on a égard de plus, comme on le doit, à la largeur de la prunelle, le concours des rayons qui entrent dans la prunelle ſuivant cette largeur, peut être dans un point très-différent; ſavoir, dans celui où le rayon LF rencontre la cathéte d'incidence; de ſorte que les rayons auront différens points de concours, entre leſquels on ne pourra déterminer celui auquel l'œil doit rapporter par préférence l'image de l'objet. De plus, les yeux peuvent être telle-

ment placés, qu'il y aura pour chacun deux images diſtinctes; ce qui fait quatre en tout; & dans quelque ſituation qu'on les ſuppoſe, il y aura au moins trois images, l'une dans la cathéte d'incidence, les deux autres dans les cauſtiques.

XII.

Une autre difficulté contre le principe de Barrow, peut ſe tirer d'une expérience que Barrow rapporte lui-même, comme favorable à ſon opinion. Il ſuſpendit dans l'eau un fil chargé de plomb à ſa partie extérieure, & dont la partie ſupérieure étoit hors de l'eau; & il apperçut diſtinctement, dit-il, l'image de la partie inférieure, qu'il voyoit par réfraction, ſéparée de l'image de la partie ſupérieure, qu'il voyoit par réfléxion. Or cette derniere image eſt conſtamment dans la perpendiculaire; donc la premiere image n'y étoit pas. Donc, conclud Barrow, les objets vûs par réfraction ne ſont pas vûs dans la perpendiculaire. Cette concluſion eſt juſte, ſi l'expérience eſt vraie; mais je dis que la même expérience prouve contre le ſentiment de Barrow. En effet, pour que l'on voye les deux images diſtinctes & ſéparées, il faut qu'elles ne ſoient pas toutes deux dans un même plan perpendiculaire, paſſant par l'œil & par l'objet; autrement une de ces deux images couvriroit l'autre, & l'expérience ſeroit au moins fort douteuſe. Donc, en ſuppoſant l'expérience exacte & vraie, les deux images ſont dans des plans différens. Or l'image de la partie

vûe

vûe par réfléxion, eſt conſtamment dans le plan perpendiculaire; donc l'autre image n'y eſt pas. Donc, ſuivant cette expérience, l'image de l'objet vû par réfraction, n'eſt pas dans le plan perpendiculaire. Cependant, ſelon le principe de Barrow, elle y doit être. Donc ce principe n'eſt pas vrai.

XIII.

Au reſte je ſuppoſe ici que l'expérience ſoit exacte; car l'ayant voulu vérifier, elle m'a paru très-incertaine, & je ſerois même porté à la croire fauſſe. Quand le fil & l'eau ſont bien en repos, les deux images paroiſſent preſque toujours ſe confondre, ou du moins ſe couvrir. Ainſi l'expérience en ce cas ne prouve, ni pour le principe de Barrow, ni pour celui des anciens.

Une autre expérience plus commune ſemble favorable au principe des anciens, au moins quant à la réfraction ſur les ſurfaces planes. Un bâton plongé obliquement dans l'eau & vû de côté, eſt vû briſé, & la partie briſée ſemble être dans le même plan perpendiculaire où ſe trouve la partie qui eſt hors de l'eau; ce qui prouve que dans ce cas l'image de chaque point eſt vûe dans la cathéte. Suivant le principe de Barrow, la partie briſée devroit paroître dans un plan différent de celui où ſe trouve la partie extérieure.

XIV.

Je crois donc qu'à l'égard des ſurfaces planes réfrac-

tantes, le principe des anciens ne s'écarte pas ſenſiblement de la vérité. Mais je doute qu'il y ſoit conforme dans d'autres cas, & en particulier dans celui des ſurfaces courbes. Je doute que dans les miroirs convexes, par exemple, l'image de l'objet ſoit jamais hors du miroir. Cependant, ſi le principe des anciens étoit vrai, elle devroit y paroître quelquefois. Car ſoit AP (*fig.* 51.) un rayon prolongé juſqu'en M; en faiſant $PO = PM$, PO ſera le prolongement du rayon réfléchi; donc ſi le point A eſt tellement éloigné dans la ligne AP, que la cathéte AC ne coupe point la ligne PO, le point A ſera vû, ſuivant le principe des anciens, au point q où la ligne PO prolongée rencontre la cathéte AQ. Le point A paroîtra donc hors du miroir. Or je doute qu'il y ait aucune expérience où il ait jamais été vû de la ſorte dans un miroir convexe.

XV.

Suivant le principe de Barrow au contraire, l'objet doit toujours être vû au-dedans du miroir, lorſqu'il eſt convexe. En effet ſoit PL infiniment petite, & ſoit priſe $Lm = LN$; l'objet ſera vû ſuivant le principe dont il s'agit, au point de concours p des rayons Lm, PO. Or ce point p eſt évidemment entre P & O.

Quoi qu'il en ſoit, on voit aſſez par tout ce qui a été dit juſqu'ici, qu'aucun des principes imaginés par les Opticiens ſur le lieu de l'image, n'eſt ſuffiſamment fondé en raiſon, & ſur-tout qu'aucun de ces principes ne ſuffit à tous les cas.

XVI.

M. Smith dans ſon Optique en imagine un autre. Il prend d'abord pour principe, que la grandeur apparente de l'image eſt proportionnelle à l'angle viſuel. Enſuite ſuppoſant que AB (*fig.* 52.) ſoit l'objet, AEB l'angle ſous lequel il ſeroit vû à l'œil nud, & aEb l'angle ſous lequel on voit l'image, il fait $ab =$ & parallèle à AB, & il prétend que l'image eſt vûe en ab. Mais 1°. M. Smith ſuppoſe que la grandeur de l'image eſt ſimplement proportionnelle à l'angle viſuel; ce qui eſt faux dans l'Optique directe, & du moins très-incertain dans la Catoptrique & la Dioptrique. 2°. Si l'image eſt rapportée en ab, elle ne devroit paroître, ce me ſemble, que de la grandeur $ab =$ à celle de l'objet; c'eſt-à-dire qu'elle ne devroit paroître ni augmentée, ni diminuée; ce qui eſt contre l'expérience.

Ces objections contre le principe de M. Smith, ſont d'autant plus fondées, que dans l'Art. 156 de ſon Ouvrage, il explique la convergence apparente des lignes parallèles, par le ſeul principe de la diminution des angles. Il regarde donc, ou paroît regarder ce principe comme la ſeule cauſe de la grandeur apparente des objets. Or 1°. il eſt conſtant que ce principe ne ſuffit pas à expliquer les loix de cette grandeur apparente. 2°. Si on appliquoit ici à la viſion directe le principe de M. Smith pour le lieu apparent dans la viſion réfléchie ou réfractée, on trouveroit que chaque diſtance de deux arbres corref-

pondans, devroit paroître à l'endroit même où elle eſt réellement; d'où il ſeroit aiſé de démontrer que chaque diſtance devroit paroître la même, & que par conſéquent les deux lignes ſeroient jugées parallèles, ce qui n'eſt pas. Il faut donc que M. Smith convienne que ſon principe n'eſt pas applicable à la viſion directe; or pourquoi la viſion réfléchie ou réfractée ſuivroit-elle d'autres loix?

XVII.

Depuis que cet Ecrit eſt compoſé, il a paru un Traité poſtume de M. Bouguer, intitulé *Traité d'Optique*, dans lequel M. Bouguer fait la même remarque que nous avons faite §. XI, ſur la double image que forment les rayons qui entrent dans chaque œil. Mais il ſe borne à cette remarque, ſans dire d'ailleurs laquelle des deux images eſt apperçûe de préférence, ſans obſerver qu'au lieu de deux images, il y en aura ſouvent quatre, & au moins trois; & enfin ſans faire mention des autres objections dont le principe de Barrow eſt ſuſceptible, ni de celles qu'on peut oppoſer au principe de M. Smith.

On demandera ſans doute quel principe il faut y ſubſtituer? Ma réponſe ſera, qu'il n'y a peut-être point ſur ce ſujet de principe général; que le lieu apparent de l'image varie vraiſemblablement ſuivant une infinité de circonſtances, dont la connoiſſance exigeroit des expériences multipliées, qu'on ne pourra peut-être réduire à une ſeule & unique loi.

XVIII.

On ſait que les objets, lorſqu'ils ſont éloignés, paroiſſent toujours plus petits qu'ils ne ſont. Mais perſonne, que je ſache, n'a cherché, ni trouvé de moyen de meſurer leur grandeur apparente. Voici ceux que j'ai imaginés.

Soit BD (*fig.* 53.) une longueur horizontale indéfinie; & ſoit A la poſition de l'œil. On propoſe de meſurer la grandeur apparente de la partie BD, qu'on ſuppoſe aſſez longue pour être vûe plus petite qu'elle n'eſt en effet. Il eſt certain 1°. que ſi l'œil A n'eſt élevé au-deſſus du plan BD que de la hauteur du corps, ou même d'une diſtance peu conſidérable, les parties BC voiſines de B paroîtront de leur grandeur naturelle. Soit donc priſe une de ces parties BC, d'un pied de longueur, par exemple, & ſoient placés des objets remarquables en E, F, D &c. de ſorte que les parties CE, EF, FD paroiſſent toutes égales entr'elles & à BC; ce qui ſe peut faire très-aiſément. En ce cas ſi n eſt le nombre des diviſions de la partie BD, il eſt viſible que la longueur *apparente* de cette partie ſera $= n$ fois BC.

2°. Il eſt à remarquer que le rapport de BD à nBC pourra être très-différent ſelon la poſition de l'œil. Je ſuis perſuadé, par exemple, que la même longueur BD paroîtra plus petite étant horizontale, que ſi elle étoit verticale. Il faudra de plus varier cette expérience pour toutes les lignes BD, horizontales, verticales ou incli-

nées, & pour tous les cas où ces lignes *B D* ſeront vûes directement ou obliquement, c'eſt-à-dire, où le plan *B A D* qui paſſe par *B D* & par l'œil, ſera perpendiculaire ou oblique au plan où ſe trouve placée la ligne *B D*. Car il y a tout lieu de croire que ces différens cas donneront des réſultats différens.

On pourra examiner encore, ſi les parties *B E*, *E D* qui paroiſſent égales entr'elles, lorſqu'on les a diviſées en deux ou en pluſieurs parties par un ou pluſieurs corps intermédiaires *C*, *F*, paroîtront encore égales, quand on aura ſupprimé ces corps intermédiaires? Et ſi en laiſſant ſubſiſter les corps *C*, *F*, elles paroîtront encore égales, quand on aura mis entre les corps *B*, *C*, *E*, *F*, *D*, de nouveaux corps intermédiaires? Je ſuis fort trompé ſi cette diverſité de circonſtances ne produit quelques variétés dans la grandeur apparente.

XIX.

Si la ligne *B D* (*fig.* 54.) eſt fort loin de l'œil, enſorte qu'une partie quelconque *B C* de cette ligne paroiſſe plus petite qu'elle n'eſt en effet; on fera placer des objets remarquables en *C*, *E*, *D* &c. à d'aſſez petites diſtances l'un de l'autre; enſorte que les diſtances *B C*, *C E*, *E D* paroiſſent égales entr'elles, & aſſez petites; d'un pied, par exemple. Enſuite on dirigera du point *B* vers l'œil *A* un cordeau d'une couleur remarquable, & dont la poſition ſera d'ailleurs arbitraire, pourvû qu'il vienne ſe terminer aſſez près de l'œil *A*, comme à quatre ou cinq pieds

de distance; enfin par le point C on fera tendre un autre cordeau Ca de même couleur, & on le dirigera de maniere qu'il paroisse parallèle au premier cordeau BA. Alors on menera la ligne $A\alpha$ perpendiculaire à BA, & qui rencontre la ligne $C\alpha$ en α; cette ligne $A\alpha$ étant mesurée, donnera la longueur apparente de la ligne BC; puisque (*hyp.*) BA, $C\alpha$ semblent parallèles. Connoissant la grandeur apparente de BC, on connoîtra celle de BD, en prenant BC autant de fois qu'il a de parties dans BD.

Il est visible qu'on peut aussi varier cette expérience en différentes manieres, selon la position de la ligne BD par rapport à l'œil; & il y a tout lieu de croire, que selon ces différentes positions, les résultats seront différens.

XX.

Dans la premiere expérience, §. XVIII, la ligne BD (*fig.* 53.) paroît plus courte qu'elle n'est, parce que les points D, F, E, &c. sont vûs plus près de l'œil qu'ils ne sont réellement, comme en d, f, e, c &c. Car en général on juge toujours les objets éloignés plus près qu'ils ne sont. La ligne BD paroît donc comme en bd; & comme on connoît par le §. XVIII, la grandeur apparente bd, & qu'on peut mesurer la grandeur réelle BD, on aura donc le rapport de bd à BD, ce qui donnera l'angle dBD. Car l'expérience prouve d'ailleurs que la ligne droite BD paroît toujours droite, quoique racourcie; d'où il s'ensuit que $Bcefd$ est une ligne droite.

Cet angle dBD est très-petit, puisque Bc doit être sensiblement égale à BC; & il faut de plus que les parties ce, ef, fd soient toutes sensiblement égales entre elles & à BC. Ainsi, après avoir calculé cet angle, & mesuré les parties BD, BF, BE, &c. on en conclura la longueur des parties df, fe, ec &c. & on verra si ces parties sont à-peu-près égales. Si elles ne le sont pas, c'est une marque qu'on n'a pas jugé assez exactement de l'égalité apparente des espaces BC, CE, EF &c. & on recommencera l'expérience & le petit calcul qui en est la suite pour trouver l'angle dBD.

XXI.

Mais on pourra trouver d'une maniere plus précise & plus facile cet angle dBD, & la grandeur apparente dB, par l'expérience suivante. Supposons que BD soit une rangée d'arbres, & $\zeta\delta$ la rangée parallèle. On cherchera par le §. XIX, la grandeur apparente de la distance $D\delta$ de deux arbres correspondans. Supposons qu'on la trouve de la quantité $B\beta$; on fera cette proportion; $D\delta$ ou $B\zeta$ est à $B\beta$ comme AD est à un quatriéme terme Ad; & cette quatriéme proportionnelle Ad donnera Bd & l'angle dBD. En effet la ligne $D\delta$ ne paroît plus petite qu'elle n'est réellement, que parce qu'elle paroît plus proche de l'œil, comme en d.

XXII.

De-là il est facile de conclure quelle devroit être la distance

distance $D\,\mathcal{S}$, pour qu'elle parût égale à $B\,\mathcal{C}$; car si on fait Ad est à AD, comme $B\,\mathcal{C}$ est à une quatriéme proportionnelle; cette quatriéme proportionnelle sera la distance $D\,\mathcal{S}$ qu'on cherche.

En faisant le même calcul pour tous les points F, E, C &c. on résoudra le Problême, qui consiste à *trouver suivant quelles lignes, des allées d'arbres doivent être plantées, pour être vûes parallèles.* Mais on peut s'épargner ce calcul par les considérations suivantes.

Il est certain que deux allées parallèles $B\,D$, $\mathcal{C}\,\mathcal{S}$, en paroissant convergentes, ne perdent point l'apparence de lignes droites. Il est certain de plus que le plan de l'allée paroît toujours sensiblement une surface plane; ainsi les allées $B\,D$, $\mathcal{C}\,\mathcal{S}$ paroissent convergentes, parce qu'on les rapporte sur un autre plan, qui fait avec le plan de l'allée l'angle $dB\,D$; les lignes $B\,D$ & $\mathcal{C}\,\mathcal{S}$ rapportées sur ce plan, y forment des lignes droites, & doivent par conséquent paroître telles.

Donc si on imagine sur ce plan $dB\,\mathcal{C}$ (*fig.* 55.), la ligne droite $\mathcal{C}\,\Delta$ parallèle à $B\,d$, & que par les points A, $\mathcal{C}$, Δ, on fasse passer un plan; ce plan formera sur le plan de l'allée une ligne droite $\mathcal{C}\,\mathcal{S}$ qui sera divergente de $B\,D$, & qui sera la direction de l'allée qu'on cherche.

Pour trouver la direction de $\mathcal{C}\,\mathcal{S}$ d'une maniere plus simple, il n'y a qu'à mener AO parallèle à $B\,d$; le point O sera celui où les lignes $D\,B$, $\mathcal{S}\,\mathcal{C}$ doivent concourir; & l'angle des lignes $D\,B$, $\mathcal{S}\,\mathcal{C}$, sera celui qui a pour tangente $\frac{B\,\mathcal{C}}{B\,O}$;

XXIII.

Il y a plus de douze ans que j'avois fait cette remarque en travaillant à l'article *Parallélisme* de l'Encyclopédie ; article auquel j'avois renvoyé d'avance dans l'article *Allée*, imprimé dès 1751. En 1755 M. Bouguer a donné à l'Académie des Sciences un Mémoire, où il remarque, comme moi, que la direction que doivent avoir des allées d'arbres pour paroître parallèles, doit être celle de deux lignes droites divergentes ; & avant qu'il lût ce Mémoire, je dis à l'Académie que j'avois fait depuis long-tems cette réfléxion.

Les anciens Opticiens, comme les P. Fabry, Taquet & autres, ont cru que l'une des allées étant droite, l'autre devoit être hyperbolique ; mais ils supposoient faussement que la grandeur des objets étoit uniquement proportionnelle à l'angle visuel. M. Varignon, prenant pour principe que la grandeur est proportionnelle au produit du sinus de l'angle visuel par la distance, trouve que la seconde allée doit être une ligne courbe convergente à la ligne droite ; ce qui étant absurde, M. Varignon en conclut que le principe qu'il a adopté, ne vaut rien. Mais ce Géometre a fait deux paralogismes. 1°. Au lieu de la distance *apperçûe*, il prend la distance *réelle*. 2°. Au lieu de faire la grandeur apparente proportionnelle au sin. de $DA\delta$ (*fig.* 53.) multiplié par $A\delta$, il multiplie ce sinus par AD ; en quoi il est clair qu'il se trompe. Il falloit multiplier le sinus par $A\delta$, ou la tan-

gente par AD, ou plutôt par la distance apperçûe Ad, & faire le produit égal à une quantité constante; & pour lors M. Varignon auroit trouvé, comme nous, une ligne droite $C\delta$ (*fig.* 55.) divergente d'avec BD, pour la direction de la seconde rangée.

Dans les Mémoires de 1755, M. Bouguer a remarqué de son côté, que M. Varignon avoit mal-à-propos substitué les distances *réelles* aux distances *apparentes*. Mais il n'a pas remarqué la seconde source d'erreur, celle d'avoir pris les distances AD au lieu des distances $A\delta$. M. Bouguer ajoute que le produit de l'angle $DA\delta$ par la distance apperçûe Ad doit être constant; en quoi il ne s'exprime pas éxactement. Il falloit dire que le produit de la tangente de l'angle $DA\delta$ par la distance apparente Ad doit être constant, ou que le produit du sinus de cet angle par $\frac{A\delta \times Ad}{AD}$ doit être constant.

XXIV.

Une autre remarque que M. Bouguer n'a pas faite, c'est que la divergence des allées $C\delta$, BD, pourroit être différente selon la distance BC des deux premiers arbres; & selon la hauteur de l'œil AB. Par exemple, si l'angle dBD étoit toujours constant ou à-peu-près, il est visible que AO étant parallèle à Bd, & par conséquent l'angle AOB étant constant, l'angle BOC qui exprime la divergence des deux rangées d'arbres, varieroit selon que AB & BC varieroient.

Il pourroit donc très-bien arriver, qu'une allée d'arbres plantée pour être vûe parallèle d'un certain point de vûe, ne le paroîtroit plus, lorſqu'on ſe mettroit à un autre point; & qu'une perſonne placée à un certain point de vûe pourroit la voir parallèle, lorſqu'une autre perſonne de taille fort différente, placée au même endroit, ne la verroit pas de même. C'eſt ſur quoi l'expérience ſeule peut nous inſtruire.

XXV.

Pour déterminer l'angle *D B d*, M. Bouguer donne dans ſon Mémoire des Méthodes différentes de celles que nous avons propoſées ci-deſſus, mais qui reviennent au même pour le fond. Il dit avoir fait là-deſſus quelques expériences, & avoir trouvé (ce qui eſt en effet très-probable) que l'angle *D B d* varie ſuivant la variété des circonſtances, c'eſt-à-dire, ſuivant la maniere dont le terrein eſt éclairé, l'intenſité de la lumiere, la couleur du ſol, & même l'endroit de l'œil où ſe peint l'objet.

Il ajoute que *B d* n'eſt pas éxactement une ligne droite; ou plutôt que le plan apparent *B C Δ d* n'eſt pas éxactement une ſurface plane, mais une eſpèce de conoïde, dont la concavité eſt tournée vers l'œil. Je doute de ce dernier fait, & voici mes raiſons. 1°. Quand on regarde une ſeule rangée *B D* (*fig.* 53.) ou même deux rangées parallèles *B D*, *C ♪*, elles paroiſſent ſenſiblement droites; or ſi le plan apparent de l'allée n'étoit pas ſenſiblement plan, la rangée apparente *B d* ſeroit concave, au lieu de

paroître droite, comme elle le paroît en effet. On dira peut-être qu'elle eſt réellement courbe, quoiqu'elle paroiſſe droite; mais comme il n'eſt queſtion ici que d'apparences, l'*apparence* ſe confond avec la *réalité*, & ce qui ne *paroît* pas *ſenſiblement* courbe, ne l'*eſt* point du tout. 2°. Il paroît que M. Bouguer a conclu que *B d* étoit une ligne courbe, non de l'apparence de cette ligne enviſagée dans ſa totalité, mais de ce qu'ayant employé différens moyens pour déterminer l'inclinaiſon du plan ou de la ligne *B d*, ces moyens ne lui ont pas donné le même réſultat; d'où il a conclu qu'on faiſoit une fauſſe ſuppoſition en prenant la ligne *B d* pour ſenſiblement droite. Mais comme les différens moyens qu'on peut employer pour meſurer l'inclinaiſon de la ligne *B d*, ne ſont pas d'une éxactitude rigoureuſe, & peuvent être ſujets à différentes erreurs, il n'eſt pas ſurprenant que ces moyens ne donnent pas abſolument le même réſultat; la différence pourra venir des erreurs des obſervations, à moins qu'elle ne fût trop grande pour être attribuée à ces erreurs; & je doute qu'elle ſoit aſſez grande pour cela. Mais ces obſervations, pour être bien faites, demandent un lieu vaſte & commode, où on puiſſe les répéter & les varier; ce qui ne peut guères ſe trouver qu'à la campagne dans des plaines découvertes & étendues.

XXVI.

M. Bouguer aſſure, comme un fait certain, que ſi le

plan de l'allée n'eſt pas horizontal, mais qu'il s'éleve au-deſſus de l'horiſon, l'angle *D B d* du plan apparent & du plan vrai ſera d'autant plus grand, que le plan vrai ſera un plus grand angle avec l'horiſon; il ajoute que ſi le plan s'incline à l'horiſon en-deſſous, l'angle apparent *D B d* ira toujours en diminuant juſqu'à une certaine inclinaiſon, où le plan apparent ſe confondra avec le plan vrai; après quoi ſi le plan vrai s'incline encore, l'angle *D B d* deviendra négatif, & le plan apparent ſera au-deſſous du plan vrai. Ces expériences ſont d'autant plus remarquables, & ont d'autant plus beſoin d'être faites avec ſoin, répétées & variées en différentes manieres, qu'il en réſulteroit peut-être des loix curieuſes & ſingulieres ſur la maniere dont nous jugeons de la diſtance apparente des objets, ſuivant la différente maniere dont ils ſont placés.

On peut, par exemple, faire cette queſtion, que l'expérience réſoudra aiſément. En ſuppoſant que le plan de l'allée ne ſoit pas horizontal, la diſtance de l'œil à ce plan eſt plus petite que ſi ce plan étoit horizontal. L'œil étant donc ſuppoſé à la même diſtance, & abſolument dans la même poſition, par rapport au plan de trois allées, d'ailleurs ſemblables, mais l'une horizontale, les deux autres inclinées, l'une au-deſſus, l'autre au-deſſous de l'horizon; on demande ſi les apparences ſeront les mêmes dans chacune de ces trois allées? Il y a lieu de croire que non; la difficulté ſera d'expliquer pourquoi.

On peut auſſi demander pourquoi la diſtance appa-

rente des arbres au ſpectateur, eſt dans certains cas plus petite, dans d'autres plus grande que la diſtance réelle, dans d'autres enfin égale à cette diſtance?

XXVII.

Les Opticiens ne ſont guères plus avancés ſur la théorie de la grandeur apparente des objets dans la viſion réfléchie ou réfractée, que dans la viſion directe. Entrons là-deſſus dans quelque détail.

Pour déterminer la grandeur apparente d'un petit objet placé un peu en-deçà du foyer d'une petite lentille, ou microſcope ſimple, ou à ce foyer même; voici comme M. Smith raiſonne, art. 118 & 119 de ſon *Optique*. Les rayons réfractés par la lentille, entrent dans l'œil à-peu-près parallèles, & l'objet vû diſtinctement en vertu de cette direction des rayons, eſt rapporté par l'œil ou jugé (ſelon M. Smith) à la plus petite diſtance, où l'œil peut voir diſtinctement les objets. D'un autre côté on démontre que l'objet eſt vû à travers la lentille, ſous le même angle qu'il paroîtroit à l'œil nû. Donc, conclud M. Smith, ſa grandeur apparente eſt à ſa grandeur réelle, comme la plus petite diſtance à laquelle on peut voir un objet diſtinctement, eſt à la longueur du foyer de la lentille; c'eſt-à-dire, comme environ ſept à huit pouces, eſt à cette longueur.

Or je demande 1°. pourquoi un point viſible, vû par des rayons parallèles ou à-peu-près parallèles, n'eſt rapporté qu'à la *plus petite diſtance* où on voit les objets

diſtinctement ? Il ſemble au contraire qu'il devroit plutôt être rapporté à la *plus grande diſtance* où l'on peut voir diſtinctement les objets ; puiſque des rayons ſenſiblement parallèles doivent naturellement être ſuppoſés venir d'un point fort éloigné, & qu'ils affectent l'organe de la même maniere que s'ils venoient d'un pareil point. 2°. Cette maniere de déterminer la grandeur apparente & le lieu de l'image dans le cas des microſcopes ſimples, eſt entiérement différente de la méthode du même M. Smith, expliquée ci-deſſus §. XVI ; & par conſéquent ou cette derniere méthode du §. XVI n'eſt pas générale, & par conſéquent eſt fautive, ou la méthode dont il s'agit dans le préſent article eſt ſujette à un inconvénient ſemblable. 3°. Pour déterminer la grandeur apparente d'un objet éloigné vû par un Teleſcope à deux verres, M. Smith n'a abſolument égard qu'à la grandeur de l'angle (voyez art. 120 de ſon Opt.), & nullement à l'endroit où l'on rapporte & où l'on juge cette image, quoique les rayons qui viennent à l'œil ſoient ſenſiblement parallèles, comme dans le cas du Microſcope ſimple & du Microſcope compoſé. Pourquoi donc cette différence dans les deux théories des Microſcopes ſimples ou compoſés, & des Téleſcopes ? Pourquoi dans le premier cas ſuppoſe-t-on que l'objet eſt jugé à la diſtance de ſept à huit pouces, & que cette diſtance apparente influe ſur la grandeur apparente, tandis que dans le ſecond cas, où les rayons entrent auſſi parallèles dans l'œil, on ne fait aucune mention de cette diſtance apparente, & on fait

fait dépendre uniquement de l'angle visuel, la grandeur apparente ?

XXVIII.

Il est donc constant que l'on n'a point encore de Théorie satisfaisante sur les loix de la grandeur apparente des objets dans la vision réfléchie & réfractée. Il me semble qu'on ne doit pas être plus satisfait des méthodes imaginées jusqu'ici, pour déterminer *par l'expérience* la grandeur apparente des objets vûs par des verres ou des miroirs. Car toutes les expériences qu'on a proposées pour cela, sont tacitement fondées sur le prétendu principe, que la grandeur apparente est proportionnelle à l'angle visuel; elles supposent que deux lignes parallèles AB, CD (*fig.* 56.) paroissant dans le prolongement de deux autres lignes parallèles ab, cd, l'espace AC est toujours jugé égal à ac; quoique $ABDC$, $abdc$ soient dans des plans différens & parallèles. Or cette supposition est fausse. Car imaginons que le plan $abdc$ couvre le plan $ABDC$, & le cache à l'œil; alors AC, quoique couverte par ac, lorsque ac est placée devant, paroîtra néanmoins plus grande que ac, lorsqu'on aura ôté l'objet ac. Un nain placé devant un géant peut couvrir le géant à nos yeux, & cependant quand le nain aura été écarté, en restant toujours dans le même plan, il paroîtra plus petit que le géant. Donc puisque les lignes AB, ab, & CD, cd peuvent se couvrir sans que les lignes AC, ac soient jugées réellement égales, il s'ensuit que AB peut être

jugée dans le prolongement de *a b*, & *C D* dans celui de *c d*, ſans que les eſpaces *A C*, *a c* ſoient jugés égaux pour cela. Pour en donner une preuve frappante, ſuppoſons que *a c* ſoit d'un pouce, & que le plan *a b d c* ſoit placé à un pied de diſtance de l'œil; ſuppoſons de plus que *A C* ſoit de deux pouces, & que le plan *A B D C* ſoit placé à deux pieds de diſtance; je dis que ſi *C D* & *c d* ſe trouvent dans un même plan, les lignes *A B*, *a b* paroîtront dans le prolongement l'une de l'autre; ce qui eſt évident; & cependant les lignes *A C*, *a c* ne paroîtront pas égales. Car en les regardant ſéparément, la premiere ſera jugée de deux pouces, & la ſeconde d'un pouce, attendu qu'elles ſont l'une & l'autre peu éloignées de l'œil, qui par conſéquent les juge de la grandeur réelle dont elles ſont.

Tels ſont les doutes que l'on peut propoſer ſur les principes ordinaires de l'Optique; d'où il réſulte que dans cette ſcience preſque tout eſt encore à faire.

Fin du neuviéme Mémoire.

SUPPLÉMENT

A l'Art. 176 du TRAITÉ DE DYNAMIQUE, *nouvelle Edition.*

DANS cet Article, qui eſt éxactement ſemblable à l'Art. 145 de la premiere Edition du même Ouvrage, j'ai remarqué qu'il y avoit des cas où une boule, qu'on ſuppoſe infiniment dure, rencontrant à la fois quatre autres boules, ne communique point de mouvement à deux de ces boules, mais ſeulement aux deux autres.

Ce que j'ai avancé ſur ce ſujet, quoiqu'appuyé par des preuves qui me ſemblent démonſtratives, n'a pas frappé de même un ſavant Géometre, qui a cru pouvoir aſſigner les viteſſes des cinq corps après le choc. C'eſt ce que je vais éxaminer.

Je ſuppoſe qu'on ait ici ſous les yeux l'Art. 176 de la nouvelle Edition du *Traité de Dynamique*, ou l'Art. 145 de la premiere, que je prie le Lecteur de relire; je ſuppoſe auſſi qu'il ait ſous les yeux la figure répondante à ces Articles, que je vais employer ici.

Soit a la viteſſe de la boule A, dont je ſuppoſe que A ſoit la maſſe, & AL la direction avant le choc; D la maſſe de chacune des boules D & C, dont je ſuppoſe

que la viteſſe avant le choc ſoit parallèle à AL, & $= b$; enfin ſoit E la maſſe de chacune des boules E, F, dont je ſuppoſe que la viteſſe avant le choc ſoit parallèle à AL, & $= c$; il eſt viſible que b & c doivent chacune être plus petites que a. Cela poſé;

Si on nomme l'angle LAD, α, & l'angle LAE, ζ, x la viteſſe perdue par la boule A ſuivant AL, z la viteſſe communiquée aux boules D, C, ſuivant AD & AC, & y la viteſſe communiquée aux boules E, F, ſuivant CE, CF; on aura par notre principe de Dynamique, les trois équations ſuivantes;

$(a - x)$ cof. $\alpha = z + b$ cof. α.

$(a - x)$ cof. $\zeta = y + c$ cof. ζ.

$Ax = 2Dz$ cof. $\alpha + 2Ey$ cof. ζ.

D'où l'on tire

$$x = \frac{2D(a-b)\text{ cof. }\alpha^2 + 2E(a-c)\text{ cof. }\zeta^2}{A + 2D\text{ cof. }\alpha^2 + 2E\text{ cof. }\zeta^2};$$

Par conſéquent la viteſſe $a - x$ de la boule A après le choc, ſera

$$\frac{Aa + 2Db\text{ cof. }\alpha^2 + 2Ec\text{ cof. }\zeta^2}{A + 2D\text{ cof. }\alpha^2 + 2E\text{ cof. }\zeta^2}.$$

La viteſſe $z + b$ cof. α de la boule D ſuivant AD, ſera égale à $(a-x)$ cof. $\alpha = \frac{(Aa + 2Db\text{ cof. }\alpha^2 + 2Ec\text{ cof. }\zeta^2)\text{ cof. }\alpha}{A + 2D\text{ cof. }\alpha^2 + 2E\text{ cof. }\zeta^2}$;

Et la viteſſe de la boule E ſuivant AE ſera de même, & par les mêmes raiſons $= \frac{(Aa + 2Db\text{ cof. }\alpha^2 + 2Ec\text{ cof. }\zeta^2)\text{ cof. }\zeta}{A + 2D\text{ cof. }\alpha^2 + 2E\text{ cof. }\zeta^2}$.

Ces formules ſont préciſément ſemblables à celles

que le ſavant Géometre dont il s'agit, a trouvées par une méthode particuliere ; ſur laquelle néanmoins on pourroit lui faire, ce me ſemble, quelques difficultés très-bien fondées, dans le détail deſquelles je n'entrerai point ici. Quoi qu'il en ſoit, comme le réſultat eſt le même par ſa méthode & par la mienne, c'eſt uniquement à ce réſultat que je vais m'attacher.

Je dis donc qu'il faut néceſſairement que les viteſſes des corps D, E, après le choc, eſtimées ſuivant AD, AE, ſoient plus grandes que les viteſſes b, c, de ces mêmes corps avant le choc, eſtimées auſſi ſuivant AD, AE ; car ſi les viteſſes étoient égales avant & après le choc, il n'y auroit point eu d'impulſion ; & il eſt abſurde de dire qu'elles puiſſent être plus petites, puiſque l'effet néceſſaire du choc eſt d'augmenter la viteſſe du corps choqué.

Il faut donc qu'on ait

$$Aa + 2Ec \cos.\mathfrak{C}^2 > Ab + 2Eb \cos.\mathfrak{C}^2 ;$$

Et de plus

$$Aa + 2Db \cos.\alpha^2 > Ac + 2Dc \cos.\alpha^2.$$

Soit ſuppoſé, comme dans l'Art. 176 du *Traité de Dynamique*, *ſeconde Edition*, $c = o$; il eſt viſible que la ſeconde condition aura lieu, & que par conſéquent les boules E, F, recevront du mouvement par le choc de la boule A ; mais la premiere condition n'aura lieu qu'au cas que Aa ſoit $> Ab + 2Eb \cos.\mathfrak{C}^2$.

Donc ſi b differe très-peu de a, comme je l'ai ſuppoſé, enſorte que $b = a - \omega$, ω étant une très-petite

quantité, il faut pour que les boules C, D reçoivent quelque mouvement par le choc de la boule A; que la boule E ſoit aſſez petite pour qu'on ait $Aa > 2Eb \text{ cof. } \zeta^2$. Dans tout autre cas les boules C, D, ne recevront point de nouveau mouvement par le choc de la boule A; elles conſerveront ſeulement la viteſſe b qu'elles avoient avant le choc; & tout ſe paſſera, ainſi que je l'ai dit dans l'endroit cité, de la même maniere que ſi la boule A choquoit les boules E, F, ſeules. En effet la viteſſe des boules A, E, F, ſera pour lors la même que ſi les boules D, C étoient abſolument nulles, puiſque ces boules ne contribuent en rien à altérer le mouvement de la boule A.

Prenons le cas où Aa eſt $= Ab + 2Eb \text{ cof. } \zeta^2$; c'eſt celui où les boules D, C, commencent à ne plus être pouſſées par le corps A. On a pour lors $z = o$, & la viteſſe des boules E, F, qui eſt $= \frac{(Aa + 2Db \text{ cof. } \alpha^2 + 2Ec \text{ cof. } \zeta^2) \text{ cof } \zeta}{A + 2D \text{ cof. } \alpha^2 + 2E \text{ cof. } \zeta^2}$, ſe réduit (en mettant pour Aa ſa valeur $Ab + 2Eb \text{ cof. } \zeta^2$, & en remarquant que $c = o$) à la ſimple valeur de $b \text{ cof. } \zeta$, ou $\frac{Aa \text{ cof. } \zeta}{A + 2E \text{ cof. } \zeta^2}$, à cauſe de $Aa = Ab + 2Eb \text{ cof. } \zeta^2$; ainſi tout ſe paſſe éxactement comme ſi D & C étoient $= o$.

A plus forte raiſon dans les autres cas, où z ſera une quantité négative, & par conſéquent impoſſible dans l'hypothèſe préſente, le choc des boules A, E, F, devra ſeul être conſidéré.

On remarquera même, que quoique la seconde condition ait toujours lieu, savoir, $Aa + 2Db \cos. a^2 > Ac + 2Dc \cos. a^2$ (au moins lorsque $b > c$); cependant, lorsque z se trouve négative, les formules trouvées ci-dessus pour les vitesses des boules A, E, F, après le choc, ne peuvent plus servir, à moins que dans ces formules on ne regarde comme nuls les termes où se trouve D; parce qu'encore une fois les boules D, C, doivent être regardées alors comme n'existant pas.

En voilà assez pour faire voir que je me suis exprimé très-exactement dans l'endroit cité de mon *Traité de Dynamique*. On peut examiner de la même manière & par les mêmes régles, le cas où c ne seroit pas $= o$, ainsi que ceux où b seroit $< c$.

Fin du Tome premier.

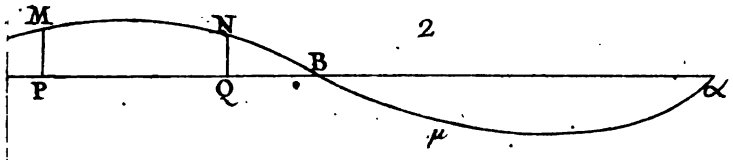
FAUTES A CORRIGER

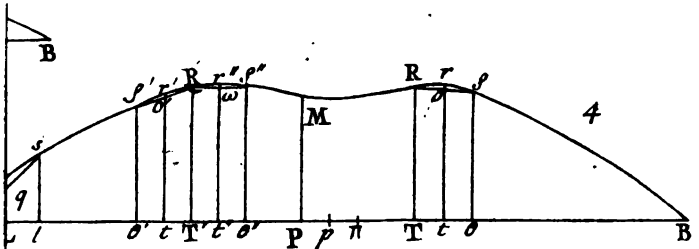
Dans ce premier Tome.

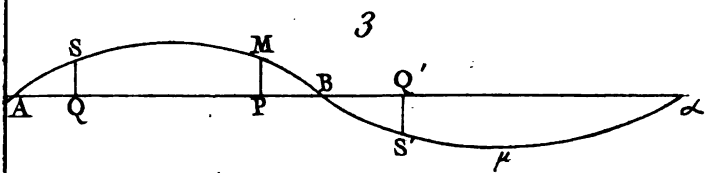
PAge 5, *lig.* 10, *au lieu de* $d\xi$ *&* $d\vartheta$, liſez $\xi\, d\, x$ *&* $\vartheta\, d\, t$.
Page 27, *lig.* 10, avant y', mettez *un point & une virgule.*
Page 54, *lig.* 1, *au lieu de* $\sqrt{\quad}$, liſez $\sqrt{2}$.
Page 60, *lig.* 13, avant $Y\, p$, mettez *un point & une virgule.*
Page 191, *lig.* 8, *au lieu de* les deux Logarithmes, *liſez* les deux Logarithmiques.
Page 241, *lig.* 10, au lieu de $(b\, b + c - a)^2$, liſez $b\, b\, (b\, b + c - a)^2$.
Page 255, *lig. derniere*, au lieu de $3\, \Delta$, *liſez* $3\, \delta$.
Page 257, *lig.* 10, *au lieu de* diſſimilitude, *liſez* ſimilitude.
Page 273, *lig.* 1, *au lieu de* tiers, *liſez* d'un tiers.
Page 280, *lig.* 10, *au lieu de* extérieure, *liſez* inférieure.

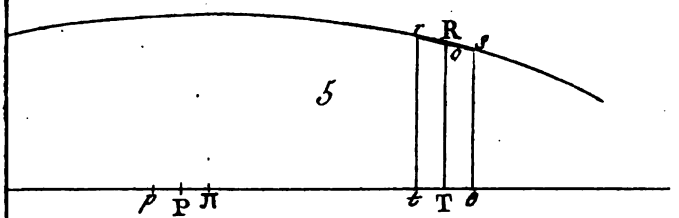
Fautes à corriger dans les Figures.

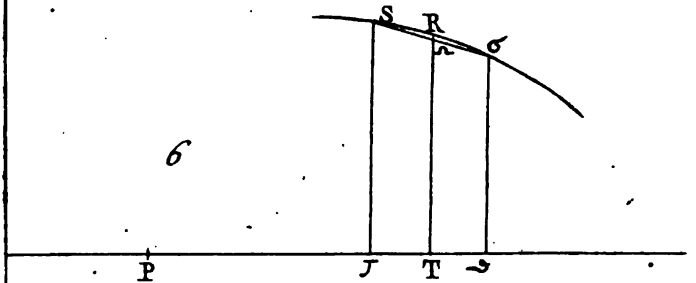
DAns *la Figure* 4, *Planche premiere*, il faut marquer d'un trait le t, qui eſt auprès de T', en cette ſorte t'.
Dans les Fig. 4 *&* 5, *Planche premiere*, il faut marquer d'un trait la lettre R qui eſt au-deſſus de T', en cette ſorte, R'.
Dans la Fig. 7, *Planche* 2, il faut marquer d'un double trait la lettre S. qui eſt ſans trait, en cette ſorte S''.

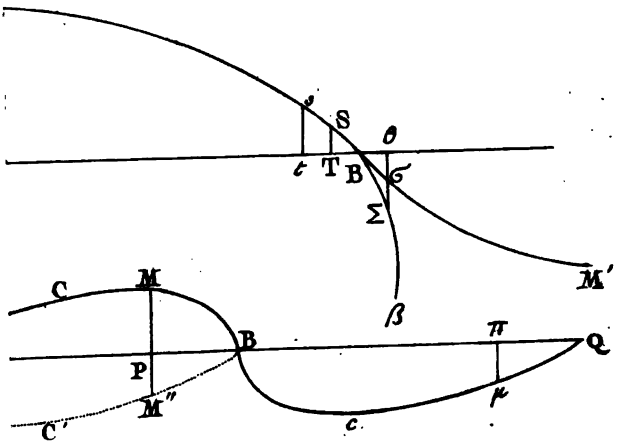

M
N
2
B
P
Q
α
μ

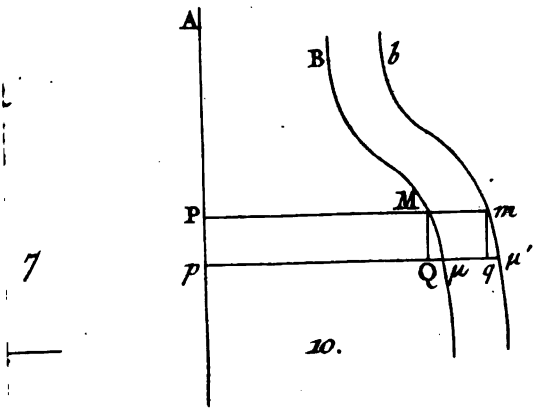

B
R
M
4
B


3
S
M
B
Q'
A
Q
P
α
S'
μ


R
5
T

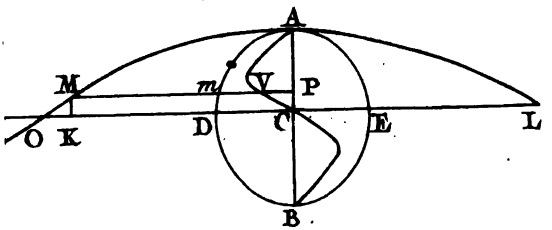

S
R
6
P
T

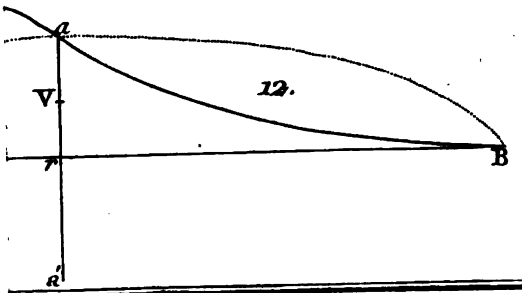


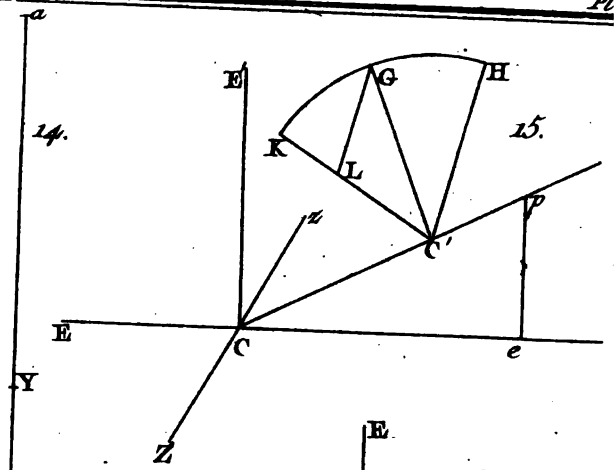


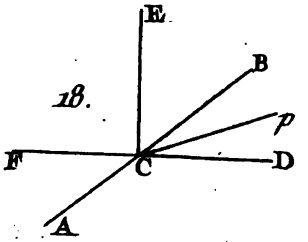
7

10.





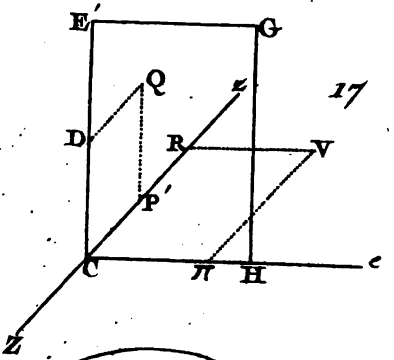

a
14.
E
G
H
15.
K
L
z
C'
p
E
C
e
Y
Z
p

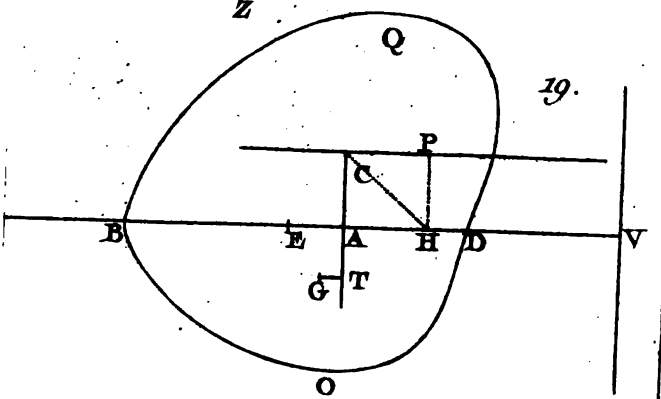

E
18.
B
p
F
C
D
A

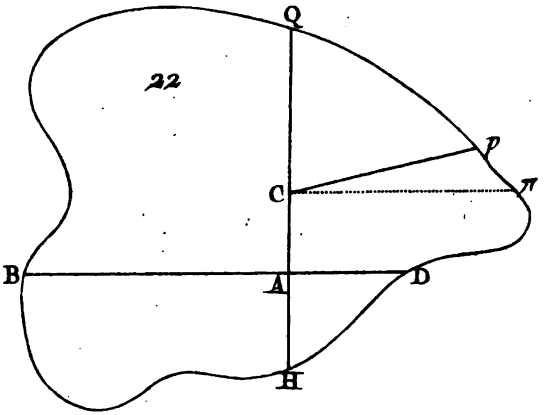
E'

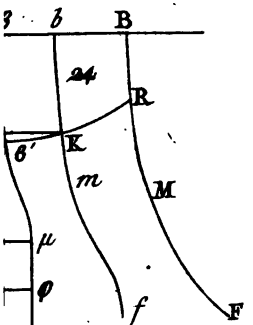
z

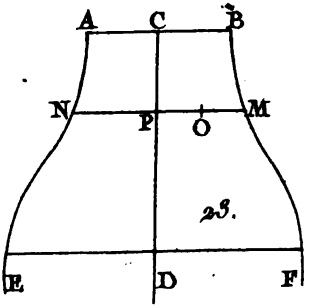
B

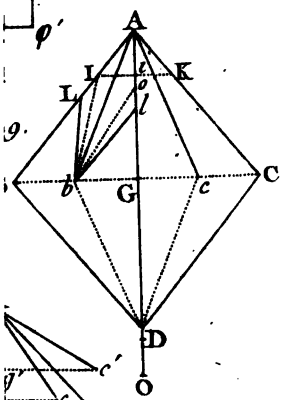

E'
G
Q
z
17
D
R
V
P'
C
π
H
e
Z

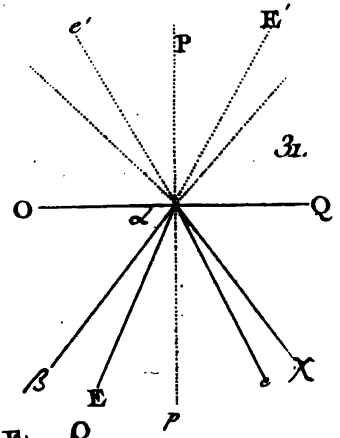

Q
19.
P
C
B
E
A
H
D
V
G
T
O

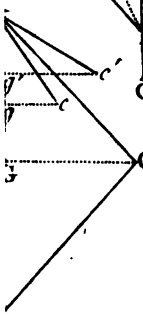

22
Q
p
C
π
B
A
D
H

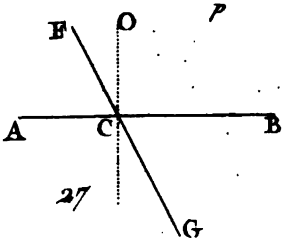

24
B
R
K
m
M
μ
φ
φ′
f
F

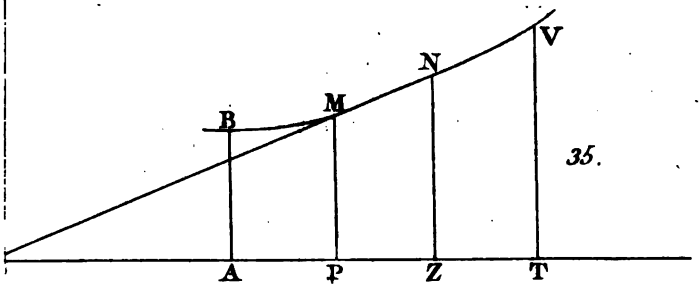

A
C
B
N
P
O
M
23.
E
D
F

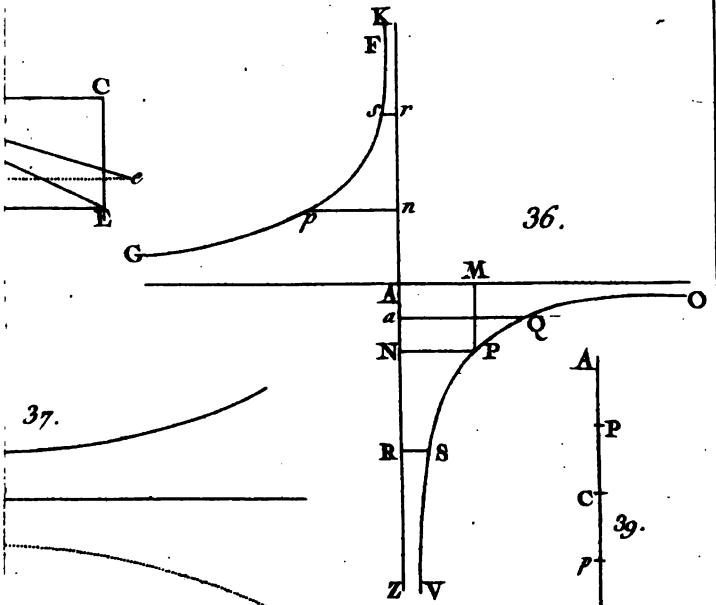

A
I
K
L
o
l
G
b
c
C
D
O

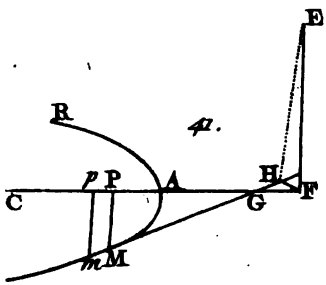

e′
E′
P
31.
O
Q
α
β
E
P
χ

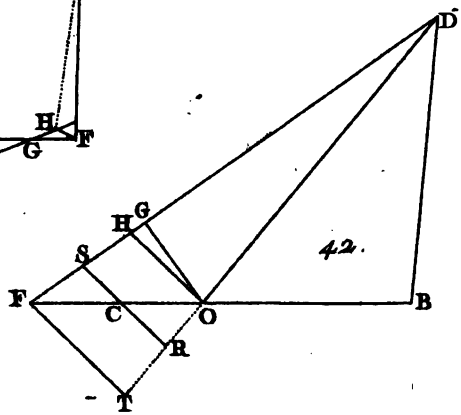

c′
C

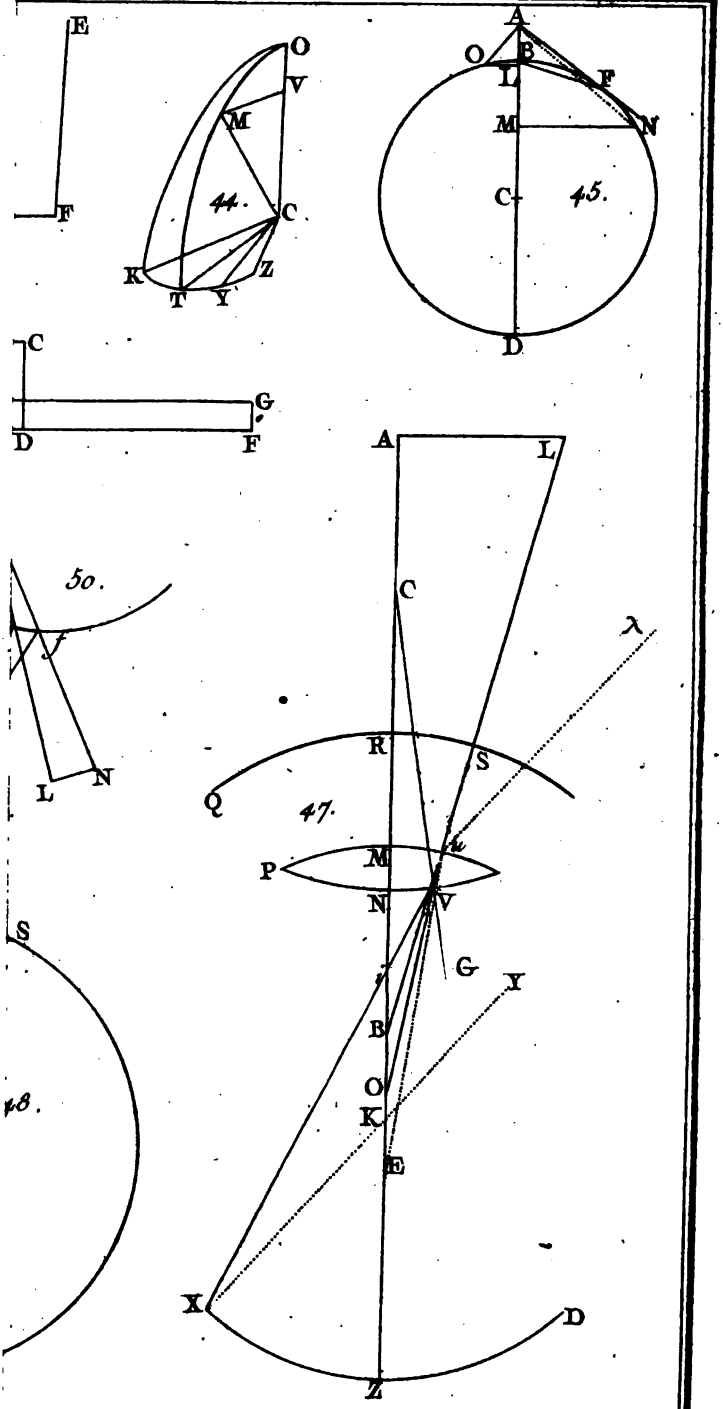

F
O
A
C
B
27
G

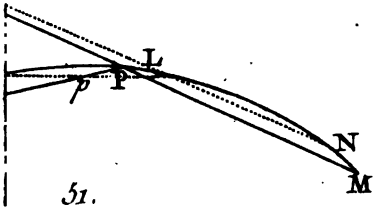

V
N
M
B
35.
A
P
Z
T


K
F
C
s
r
e
E
p
n
36.
G
M
A
O
a
Q
N
P
A
37.
P
R
S
C
39.
p
Z
V

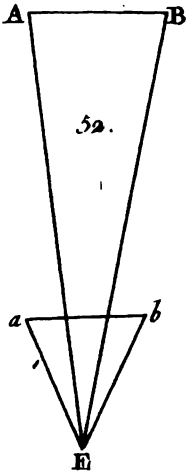

E
R
41.
p
P
A
H
F
C
G
m
M


D
H
G
S
42.
F
C
O
B
R
T

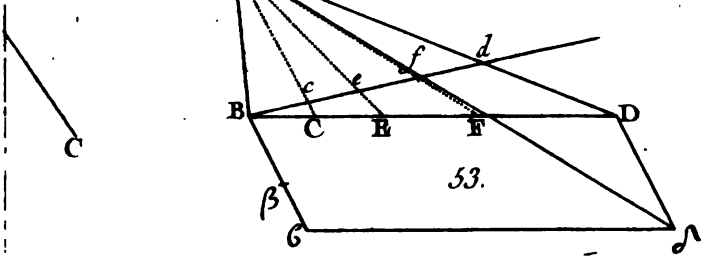

E
F
O
V
M
44.
C
K
T
Y
Z
A
O
B
L
F
M
N
C
45.
D
C
G
D
F
50.
L
N
A
L
C
λ
R
S
Q
47.
P
M
N
V
G
Y
B
O
K
E
S
48.
X
D
Z



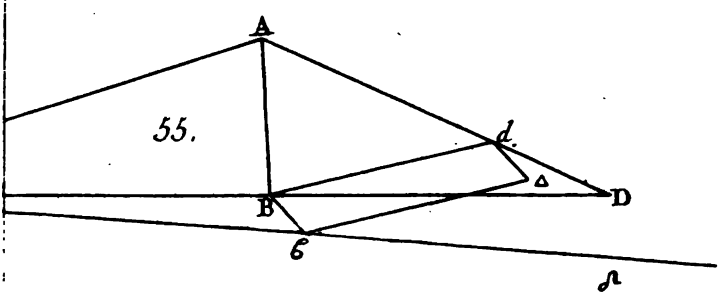
51.



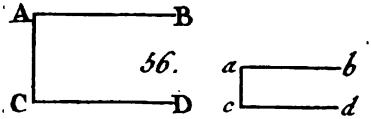
52.



53.



55.



56.